آزمون مرحلهٔ اول سی و یکمین المپیاد ریاضی کشور ☺

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

۰	۵	۹	۶	

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شمارهٔ گزینهٔ درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینهٔ شمارهٔ ۳ درست است باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

۳				

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. مأمور آمار، یک سرشماری در شهرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده‌ها به صورت زیر است:

تعداد اعضای خانواده	۲	۳	۴	۵	۶
درصد	۱۰	۳۰	۳۰	۱۰	۲۰

چند درصد از مردم، در خانواده‌های ۲ نفری زندگی می‌کنند؟

۲. کم‌ترین مقدار $\frac{a^2}{b}$ در مجموعهٔ زیر چند است؟

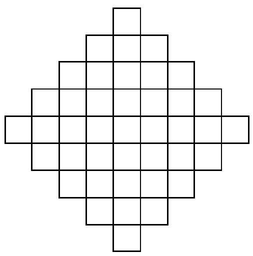
$$\left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, (a+1)(b+1) = ab, 0 \leq b\right\}$$

۳. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش‌پذیر باشد؟

۴. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ طول ضلع AB برابر ۴ و طول دو ساقِ AD و BC برابر ۲ است. زاویهٔ $\angle ABC$ نیز برابر ۱۲۰° درجه است. اگر E محل برخورد دو قطر ذوزنقه باشد، نسبت $\frac{BE}{DE}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$ ۵) $\frac{۲}{۳}$

۵. تعدادی مُهر مربعی شکل با ابعاد ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴ و ۵×۵ به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مُهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشهٔ روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مُهر روی نقشه بکوبیم تا همهٔ جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۶. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

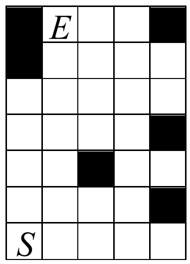
$$\begin{cases} x^۲y + xy^۲ = ۳۰ \\ xy + x + y = ۱۱ \end{cases}$$

۷. در لحظه‌ای که ماهوارهٔ امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصلهٔ ماهواره تا دورترین نقطهٔ روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

۸. چند چهارتایی (a,b,c,d) از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

$$a^b = cd, \quad b^c = da, \quad c^d = ab, \quad d^a = bc.$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) بی‌نهایت



۹. در شکل روبه‌رو، مهره‌ای ابتدا در خانهٔ S قرار دارد و در هر قدم می‌توانیم آن را در یکی از جهت‌های بالا، چپ و راست یک خانه جابه‌جا کنیم، بدون این‌که از جدول خارج شود یا وارد خانه‌های سیاه‌رنگ شود. اگر بخواهیم از هیچ خانه‌ای بیش از یک مرتبه عبور نکنیم، به چند روش مختلف می‌توان مهره را به خانهٔ E رساند؟

۱۰. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دوتایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

۱۱. برای دو عدد طبیعی a و b عمل $\hat{}$ به این صورت تعریف می‌شود: $a \mathbin{\hat{}} b = a^b$. عمل $\otimes$ نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

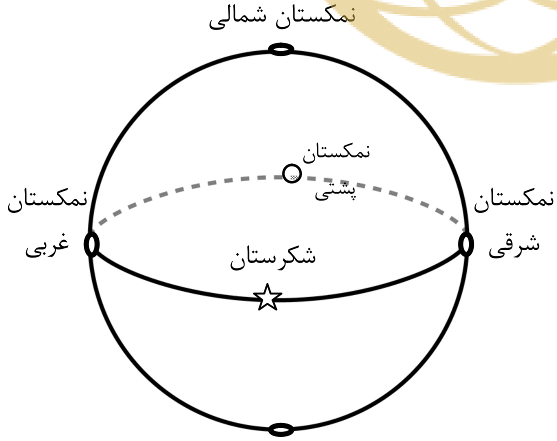
$$a \otimes b = (\cdots((a \mathbin{\hat{}} a) \mathbin{\hat{}} a) \mathbin{\hat{}} \cdots \mathbin{\hat{}} a)$$

که در عبارت سمت راست، a، b مرتبه ظاهر شده است. در این صورت $a \otimes b$ برابر است با:

۱) $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ ۲) b^a ۳) a^{ab} ۴) $a^{a^{b-1}}$ ۵) ab^{b^a}

۱۲. در مثلث ABC، میانه‌های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد. طول ضلع BC چه قدر است؟

۱۳. سلطان شکرستان در نظر دارد که یک تور جهان‌گردی بین شکرستان و ۵ شهر دیگر برقرار کند: نمکستان‌های شمالی، جنوبی، شرقی، غربی و پشتی! (در شکل، نمکستان پشتی، در پشت کره است!). هر شهر تنها به ۴ شهر نزدیکِ خود خط هوایی دارد. به چند صورت می‌توان توری طراحی کرد که ابتدا و انتهای آن شکرستان باشد و از شهرهای دیگر دقیقاً یک بار بگذرد؟



۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰ ۵) ۴۸

۱۴. به تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، تابعی n مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای n عضوی باشد. اگر f و g به ترتیب n و m مقداری باشند. توابع $f+g$، $f\times g$ و $f\circ g$، به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

۱) mn، mn و $\min(m,n)$.

۲) mn، $m+n$ و $\max(m,n)$.

۳) $m+n$، mn و n^m.

۴) $m+n$، mn و mn.

۵) $\max(m,n)$، mn و mn.

۱۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، ($\angle A=\angle D=۹۰^\circ$)، M وسط ضلع BC است. فرض کنید دایره به مرکز M و شعاع MB، درونِ پاره خط AD را در X و Y قطع کند. اگر $AB=۱$ و طول پاره‌خط‌های BC، CD و DA به ترتیب p، q و r باشد. طول پاره‌خط‌های AX و AY ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر هستند؟

۱) $x^{۲}+px+q$

۲) $x^{۲}-rx+q$

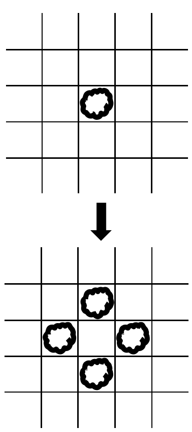
۳) $x^{۲}-px+q$

۴) $qx^{۲}+rx+p$

۵) $px^{۲}-qx+r$

۱۶. جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای $\frac{۱}{۹۰},\frac{۲}{۹۰},\dots,\frac{۹۰}{۹۰}$، بعد از ساده کردن بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱۷. در خانه‌های یک شبکهٔ مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هرکدام به یکی از چهار خانهٔ مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانهٔ ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانهٔ مجاور خانهٔ آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت.)

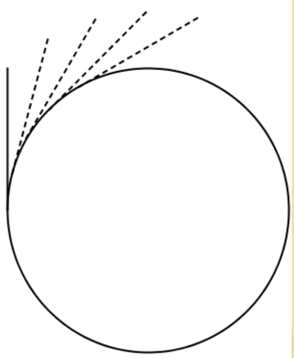


۱۸. چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوبه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعهٔ $\{۲,۸,۹,۳۲,۳۶,۱۴۴\}$ شود؟

۱۹. تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ این‌گونه تعریف شده است که $f(1)=1$ و برای $n>1$ اگر تجزیهٔ n به عوامل اول به صورت $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ باشد، آن‌گاه $f(n)=r_1^{p_1}\cdots r_k^{p_k}$. کدام درست است؟
(p_iها اعداد اول متمایزند و r_iها اعداد طبیعی هستند.)

۱) f پوشا است.
۲) f یک‌به‌یک است.
۳) اگر a و b عضو برد f باشند، آن‌گاه ab عضو برد f است.
۴) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n)\leq f(mn)$.
۵) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n)\geq f(mn)$.

۲۰. چرخی به شعاع ده متر از مرکز به وسیلهٔ محوری به زمین متصل شده، طوری که می‌تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله‌ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ 60° بچرخد، نزدیک‌ترین گزینه به مساحت نقطه‌هایی که این میله از روی آن‌ها عبور می‌کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظهٔ بینی را نشان می‌دهد.)



۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰ ۵) ۶۰

۲۱. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با دو عدد حقیقی دل‌خواه a_1 و a_2 شروع می‌شود و جمله‌های بعدی آن از رابطهٔ $a_{n+2}=\max\{a_{n+1}-1,a_n+1\}$ به‌دست می‌آیند. اگر $a_{100}=100$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای a_1 چند است؟

۲۲. احسان و حسام در جدولی 2×3 مطابق شکل، با هم مهره‌بازی می‌کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می‌تواند یک مهره در یکی از خانه‌های خالی جدول قرار دهد یا یکی از مهره‌های موجود را به خانهٔ سمت راستش یا خانهٔ بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام‌یک از خانه‌های شماره‌گذاری‌شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

	۱
۳	۲
۴	

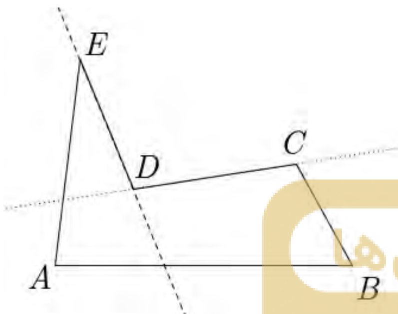
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۵) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

۲۳. تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط $x \leq y$ را بیابید.

$$x^۲ + y^۲ = xy(x,y) + [x,y].$$

منظور از (x,y)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک x و y و منظور از $[x,y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y است.

۲۴. منظور از یک ضلعِ «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلعِ مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های CD و DE ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟



۲۵. روی سطحِ کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ ۵) ۱۷