

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «علم نخبز دنیا»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۳۹۸

سی‌امین دوره المپیاد کامپیوتر

صبح - ساعت: ۰۹:۰۰

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات	مدت آزمون (دقیقه)
۲۵	۱۵۰

شماره صندلی:

نام خانوادگی:

نام:

توضیحات مهم

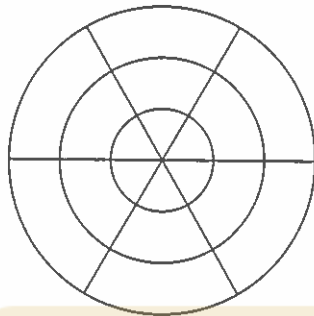
استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

- ۱- کد دفترچه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخنامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخنامه شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد دفترچه سؤالات شما که در زیر هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد اصلی که در همین صفحه است، یکی باشد.
- ۲- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه برگه‌های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید.
- ۳- یک برگ پاسخنامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسؤول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخنامه را با مداد مشکی بنویسید.
- ۴- برگه پاسخنامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۵- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- ۶- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین حساب و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکند یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۷- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.
- ۸- داوطلبان نمی‌توانند دفترچه سؤالات را با خود ببرند. (دفترچه باید همراه پاسخنامه تحویل داده شود.)
- ۹- خبرگاه المپیاد کامپیوتر: inoi.ir می‌باشد.

۵ شکل زیر از سه لایه و شش قطاع تشکیل شده است که ۱۸ خانه‌ی متفاوت ساخته‌اند. می‌خواهیم خانه‌ها را با اعداد ۱ تا ۱۸ شماره‌گذاری کنیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ لایه‌ای نداشته باشیم که ضرب اعداد خانه‌های آن بر ۲۶ یا ۳۹ بخش پذیر باشد.
- ضرب اعداد هر قطاع بر ۶ بخش پذیر باشد.

به چند طریق این کار ممکن است؟



(۱) $0 \cdot (2!)^6 \times 2^6 \times (3!)^2 \times (6!)^2$ (۲) $3 \times (6!)^2 \times 3 \times 2^6 \times (6!)^2$ (۳) $3 \times (6!)^2 \times 2^6 \times (6!)^2$ (۴) $3 \times (6!)^2 \times 2^6 \times (6!)^2$ (۵) $3 \times (6!)^2 \times 2^6 \times (6!)^2$

۶ مهدی می‌خواهد خانه‌های یک جدول 3×3 را با اعداد صحیح ۰ تا ۴ پر کند، طوری که عدد هر خانه برابر با باقی‌مانده‌ی جمع اعداد همسایه‌هایش در تقسیم بر ۵ باشد (دو خانه همسایه هستند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند). در ابتدا مرتضی یک عدد صحیح x از ۰ تا ۴ انتخاب می‌کند و آن را در هر چهار خانه‌ی گوشه‌ی جدول قرار می‌دهد. مهدی چند راه برای پر کردن پنج خانه‌ی خالی جدول دارد؟

(۱) 3125 (۲) تعداد راه‌ها وابسته به x است. (۳) 1 (۴) 25 (۵) 5

۷ جدول زیر را در نظر بگیرید. به خانه‌های شامل دایره‌ی توخالی، مولد می‌گوییم. می‌خواهیم، از خانه‌ی «آ» به خانه‌ی «ب» برسیم. ما مجاز به حرکت در چهار جهت اصلی هستیم، با این شرط که اگر بخواهیم در جهتی حرکت کنیم، باید در پشت سر خانه‌ی کنونی (بلافاصله یا با فاصله) خانه‌ی مولدی قرار داشته باشد. به طور مثال حرکت اول حتماً به سمت راست است. چند راه برای رفتن از خانه‌ی «آ» به خانه‌ی «ب» وجود دارد، طوری که هر خانه را حداکثر یک بار ببینیم؟

				○
	○	آ		
				○
○			ب	
				○
	○			

(۱) 2 (۲) 1 (۳) 4 (۴) 0 (۵) 3

۸ سعید و حسام یک بازی فکری را سه دست انجام می‌دهند و در نهایت کسی برنده می‌شود که حداقل دو دست بازی را برده باشد. در هر دست، احتمال برد حسام a و احتمال برد سعید $1 - a$ است. احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی p در نظر بگیرید. حال فرض کنید این دو نفر، دو دست از بازی را انجام داده‌اند و سعید، دقیقاً یک دست را برده باشد؛ احتمال برنده شدن حسام را در کل بازی با شرایط جدید p' در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای این که $p' > p$ باشد، چیست؟

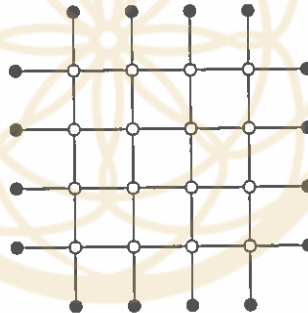
- (۱) $a < 1/5$ (۲) $a < 1/2$ (۳) $a < 2/3$ (۴) هیچ‌کدام (۵) $a < 1/3$

۹ در شکل زیر به هر یک از ۱۰ نقطه‌ی مشخص شده یک رأس می‌گوییم. دو رأس را مجاور گوییم، اگر با یک پاره‌خط مستقیم به هم وصل باشند. به چند طریق می‌توان رأس‌ها را با قرمز، آبی و سبز رنگ کرد، طوری که هر دو رأس مجاور، ناهم‌رنگ باشند؟ الزامی به استفاده از هر سه رنگ نیست.



- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۹۶ (۴) ۰ (۵) ۴۸

۱۰ در ابتدا در هر نقطه‌ی توپُر از شکل زیر یک متحرک قرار دارد. آن‌ها قرار است طبق الگوریتمی مشخص حرکت کنند. سرعت حرکت متحرک‌ها برابر و ثابت است. هم‌چنین همگی از لحظه‌ی یکسانی شروع به حرکت می‌کنند. پس از آغاز فرآیند، هر متحرک به محض این که به یک نقطه‌ی توپُر برسد، می‌ایستد.



به ازای کدام موارد از الگوریتم‌های زیر، پس از ایستادن تمام متحرک‌ها، در هر نقطه‌ی توپُر یک متحرک وجود خواهد داشت؟

- الگوریتم (آ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر نقطه‌ی توخالی به راست می‌پیچد و به حرکت ادامه می‌دهد.
- الگوریتم (ب): هر متحرک هنگام رسیدن به اولین نقطه‌ی توخالی به راست می‌پیچد، هنگام رسیدن به دومین نقطه‌ی توخالی به چپ می‌پیچد و همین طور یک در میان با چرخش به راست و چپ ادامه می‌دهد.
- الگوریتم (پ): هر متحرک هنگام رسیدن به هر خانه‌ی توخالی، اگر در آن لحظه متحرک دیگری را نیز در همان نقطه ببیند، به سمت راست می‌پیچد؛ در غیر این صورت مستقیم می‌رود.

- (۱) آ و ب (۲) آ و ب (۳) هر سه مورد (۴) هیچ‌کدام (۵) آ

۱۵ چند دنباله‌ی پنج عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که می‌توانند با تعدادی مرحله، صاف و صوف شوند؟

- ۱۰۰۱ (۵) ۲۴۳ (۴) ۱۲۰ (۳) ۳۰۶۰ (۲) ۳۱۲۵ (۱)

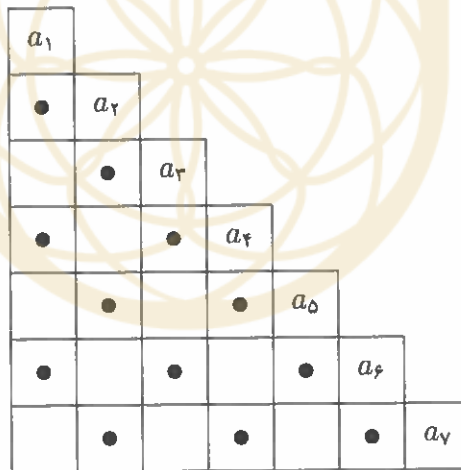
۱۶ فرض کنید تعدادی عمل ارتودنسی روی دنباله‌ای انجام شود. گوییم یک عدد در دنباله در حین مراحل زخمی شده است، اگر دست کم یک بار افزایش و دست کم یک بار کاهش یافته باشد. چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ را می‌توان با تعدادی عمل ارتودنسی صاف و صوف کرد، طوری که هیچ عددی در حین مراحل زخمی نشود؟

- ۱۲۰ (۵) ۲۸ (۴) ۲۴ (۳) ۱۶ (۲) ۱۲ (۱)

منظور از بیت، رقم ۰ یا ۱ است. اعمال \vee ، \wedge و \oplus روی بیت‌ها مطابق جدول زیر تعریف می‌شوند:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$
۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۰

بوجی پلکانی به شکل زیر دارد:



با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می‌گذارد. سپس مقدار هر خانه‌ی دیگر مانند C برابر حاصل عمل \oplus روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد. بوجی به چند طریق می‌تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه‌ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ شود؟ در این مسئله نقاط داخل خانه‌ها تأثیری ندارند.

- ۱۲۶ (۵) ۸ (۴) ۲ (۳) ۶۴ (۲) ۰ (۱)

مرحله‌ی یکم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۸ بوجی ابتدا به جای هر یک از a_1 تا a_7 یک بیت می‌گذارد. سپس مقدار هر خانه‌ی دیگر مانند C به صورت زیر مشخص می‌شود:

- اگر C نقطه داشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل ۸ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد.
 - اگر C نقطه نداشته باشد، مقدار آن برابر حاصل عمل ۷ روی خانه‌های بالا و راست C خواهد شد.
- بوجی به چند طریق می‌تواند کارش را انجام دهد، طوری که مقدار خانه‌ی پایین-چپ پلکان برابر ۱ شود؟

۱ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۶ (۳) ۱۶ (۴) ۴۸ (۵)

۱۹ همان مسئله‌ی قبل را حل کنید، با این تفاوت که عملکرد خانه‌های نقطه‌دار و بدون نقطه جابه‌جا شود؛ یعنی مقدار هر خانه‌ی نقطه‌دار با عمل ۷ و مقدار هر خانه‌ی بدون نقطه با عمل ۸ به دست آید.

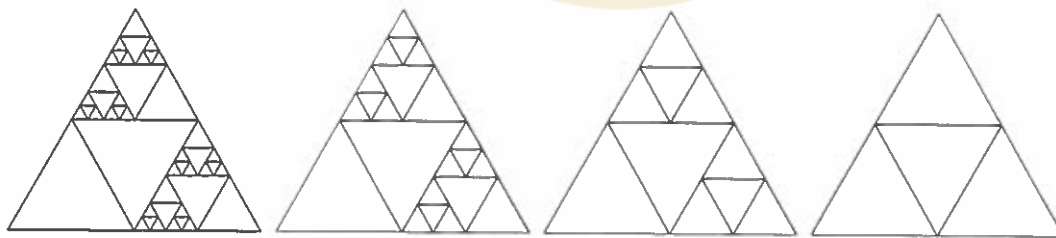
۸۰ (۱) ۴۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱ (۴) ۱۶ (۵)

مثلثال شکلی است که مرحله به مرحله تکمیل می‌شود. مثلثال در مرحله‌ی صفرم از یک مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ تشکیل شده است که به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر و هم‌اندازه تقسیم شده است. به یک مثلث کال گوئیم، اگر داخل آن کاملاً خالی باشد. مثلثی را که دقیقاً شامل چهار مثلث کال باشد، جوان می‌گوئیم. در هر مرحله تمام مثلث‌های جوان را در نظر می‌گیریم و عملیات زیر را بر روی هر کدام از آنها انجام می‌دهیم:

چهار مثلث کال داخل را مثلث‌های بالا، وسط، پایین‌راست و پایین‌چپ می‌نامیم. دو تا از این چهار مثلث، به چهار مثلث کوچک‌تر تقسیم می‌شوند که انتخاب مثلث‌ها بستگی به باقی‌مانده‌ی شماره‌ی مرحله به سه دارد:

- اگر باقی‌مانده برابر یک باشد، مثلث پایین‌راست و مثلث بالا را تقسیم می‌کنیم.
- اگر باقی‌مانده برابر دو باشد، مثلث پایین‌چپ و مثلث بالا را تقسیم می‌کنیم.
- اگر باقی‌مانده برابر صفر باشد، مثلث پایین‌راست و مثلث پایین‌چپ را تقسیم می‌کنیم.

سه مرحله‌ی اول در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۲۰ پس از مرحله‌ی n ام، چند مثلث کال وجود دارد؟

۲ (۱) $2 \times 2^{i+1} - 2$ (۲) $2^{i+1} + 2$ (۳) $3^{i+1} + 1$ (۴) $2 \times 3^{i+1} - 2$ (۵)

۲۱ به یک نقطه در صفحه تیز گوئیم، اگر رأس دست کم یکی از مثلث‌های شکل باشد (نه لزوماً مثلث‌های کال). پس از مرحله‌ی ۲ام، تعداد نقاط تیز چند تاست؟

- (۱) $3 \times 2^{i+1}$ (۲) $2 \times 3^{i+2} - 4$ (۳) 6^{i+1} (۴) $2 \times 3^{i+1}$ (۵) $2 + 3^{i+1}$

۲۲ به یک خط افقی در صفحه مشغول گوئیم، اگر شامل حداقل یک نقطه‌ی تیز باشد. لزومی ندارد این خط در مثال رسم شده باشد. پس از مرحله‌ی ۶ام، تعداد خط‌های افقی مشغول در صفحه چیست؟

- (۱) ۶۳ (۲) ۵۳ (۳) ۱۲۸ (۴) ۷۹ (۵) ۵۰

پشته یکی از داده‌ساختارهای پرکاربرد در علوم کامپیوتر است که دنباله‌ای از عناصر را ذخیره می‌کند. تغییرات در عناصر پشته فقط از دو نوع می‌تواند باشد:

- یک عضو به انتهای پشته اضافه شود.
- یک عضو از انتهای پشته حذف شود.

برای مثال فرض کنید پشته‌ای به صورت $\langle 1, 4, 3 \rangle$ باشد. با اضافه کردن عضوی با مقدار ۷ به انتها، پشته به صورت $\langle 1, 4, 3, 7 \rangle$ خواهد شد. همچنین اگر از انتهای پشته‌ی $\langle 3, 10, 2 \rangle$ یک عنصر را حذف کنیم، پشته به صورت $\langle 2, 10 \rangle$ خواهد شد.

اکنون می‌خواهیم یکی از روش‌های ذخیره‌سازی پشته در کامپیوتر را شرح دهیم. در این روش، عمل‌های زیر را می‌توان انجام داد:

- عمل ساختن پشته: با دستور $create(S)$ پشته‌ای با نام S ساخته می‌شود و یک خانه در حافظه به آن اختصاص پیدا می‌کند که در ابتدا این خانه مقداری ندارد. اجرای این عمل یک واحد زمان مصرف می‌کند.

$S \square$

- عمل اضافه کردن به پشته: با دستور $push(S, x)$ مقدار x به انتهای پشته‌ی S اضافه می‌شود. دو حالت داریم:

– حافظه‌ی مربوط به S دارای خانه‌ی خالی باشد؛ در این صورت عدد x در نخستین خانه‌ی خالی حافظه‌ی مربوط به پشته‌ی S قرار می‌گیرد. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, 6)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

$S \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 1 & 3 & \\ \hline \end{array}$ $S \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$

اجرای عمل بالا یک واحد زمان مصرف می‌کند.

– حافظه‌ی مربوط به S دارای خانه‌ی خالی نباشد؛ در این صورت جایی جدید از حافظه با دو برابر تعداد خانه‌های حافظه‌ی فعلی به S اختصاص داده شده و سپس عمل اضافه کردن انجام می‌شود. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $push(S, 10)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست خواهد آمد:

$S \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 5 & 2 \\ \hline \end{array}$ $S \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 5 & 2 & 10 & \\ \hline \end{array}$

مرحله‌ی یکم سی‌امین المپیاد کامپیوتر کشور

اجرای چنین عملی به اندازه‌ی تعداد خانه‌های حافظه‌ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می‌کند. برای نمونه، در مثال بالا ۸ واحد زمان مصرف می‌شود.

- عمل حذف کردن از پشته: با دستور $pop(S)$ یک عنصر از انتهای پشته‌ی S حذف می‌شود. برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۲	۳	۵	۲	۱	۱	۰			
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--

S

۲	۳	۵	۲	۱	۰				
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--

در حالتی که با خالی کردن آخرین خانه‌ی پر حافظه‌ی مربوط به S ، دست کم نیمی از خانه‌ها خالی شود، حافظه‌ای جدید به S اختصاص داده می‌شود که خانه‌های خالی آن حذف شده‌اند (مگر اینکه S تنها یک خانه داشته باشد که در این صورت آن خانه حذف نمی‌گردد). برای مثال اگر حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت چپ باشد و دستور $pop(S)$ اجرا شود، حافظه‌ی مربوط به S به شکل سمت راست در خواهد آمد:

S

۱	۱	۵	۲	۱	۰				
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--

S

۱	۱	۵	۲						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

اجرای عمل حذف عنصر در حالتی که تعداد خانه‌ی حافظه‌ی مربوط به S تغییر کند (نصف شود)، به اندازه‌ی تعداد خانه‌های حافظه‌ی جدید اختصاص داده شده زمان مصرف می‌کند. برای نمونه در مثال بالا ۴ واحد زمان مصرف می‌شود. در حالتی نیز که تعداد خانه‌های حافظه‌ی مربوط به S تغییر نمی‌کند، یک واحد زمان مصرف خواهد شد.

- عمل کپی: با دستور $copy(A, B)$ حافظه‌ای به اندازه‌ی حافظه‌ی پشته‌ی A به پشته‌ی B اختصاص می‌یابد و مقادیر خانه‌های حافظه‌ی B نیز برابر مقادیر خانه‌های حافظه‌ی A خواهند شد. اجرای این عمل به اندازه‌ی تعداد خانه‌های حافظه‌ی مربوط به A زمان مصرف می‌کند.

توجه کنید قبل از عملیات روی پشته، باید آن پشته در خطوط قبلی برنامه با دستور $create$ ساخته شده باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

برنامه‌ی زیر چند واحد زمان مصرف می‌کند؟ ۲۳

$create(X)$

$push(X, ۱)$

$push(X, ۱)$

$push(X, ۱)$

$pop(X)$

$push(X, ۱)$

$push(X, ۱)$

$pop(X)$

$push(X, ۱)$

۱۵ (۵)

۱۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۴ (۱)

۲۴ در برنامه‌ای ابتدا با دستور $create(S)$ پشته‌ی S ساخته می‌شود. در ادامه‌ی این برنامه ۱۳۹۸ دستور $push(S, ۱)$ وجود دارد. این برنامه چند واحد زمان مصرف می‌کند؟

- ۲۱۳۹۹ (۵) ۲۱۳۹۸ + ۱۳۹۷ (۴) ۵۴۸۲ (۳) ۴۰۹۵ (۲) ۵۴۹۳ (۱)

۲۵ یک برنامه حداقل چند خط باید داشته باشد تا در انتهای آن دست کم ۱۰۰ واحد حافظه (در مجموع برای پشته‌ها) وجود داشته باشد؟

- ۲۳ (۵) ۲۲ (۴) ۵۱ (۳) ۳۵ (۲) ۲۷ (۱)

باشگاه طلایی‌ها

