

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات و پاسخ

باشگاه طلاب رها
مرحله دوم

هشتمین المپیاد

نجوم و اختر فیزیک

ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

تذکرات پیش از آزمون:

- ۱- تعداد سؤالات این آزمون ۶ سؤال و وقت آن ۴ ساعت است.
- ۲- بر روی هر برگه پیش نویس که به شما داده می شود نام و نام خانوادگی خود را حتماً بنویسید.
- ۳- در زیر خط چین بالای پاسخنامه غیر از جواب سؤالات هیچ علامت یا عبارت مشخصه ای ننویسید.
- ۴- معرفی نامه و کارنامه ی خود را در دسترس نگه دارید تا مسئول مربوط بتواند آن ها را ملاحظه و جمع آوری نماید.
- ۵- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه ریزی نباشد، مجاز است.
- ۶- استفاده از جدول های نجومی، اطلس ها و آلماناک ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- ۷- هنگام آزمون همراه داشتن تلفن همراه (خاموش یا روشن) تخلف محسوب می شود. لذا آن را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.
- ۸- نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

تکثیر این سوالات تنها بدون دریافت وجه و فقط برای افزایش سطح علمی دانش آموزان بلا مانع است.

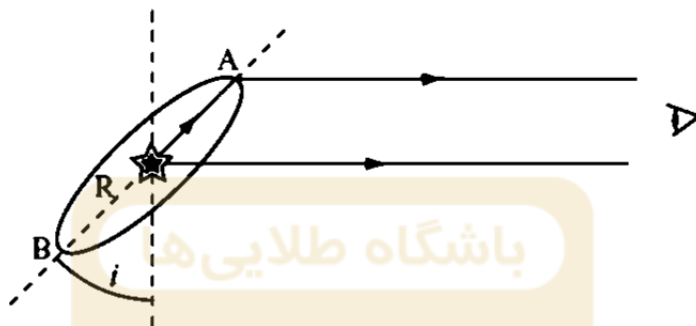
ویرایش و پاسخ: کامبیز خالقی

ثوابت فیزیکی و نجومی

$6 / 67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3 \times 10^8 ms^{-1}$	سرعت نور	c
$3 / 09 \times 10^{16} m$	پارسک	pc
$1 / 50 \times 10^{11} m$	واحد نجومی	Au
$9 / 46 \times 10^{15} m$	سال نوری	Ly
$6 / 96 \times 10^8 m$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$6 / 38 \times 10^6 m$	شعاع زمین	R_{\oplus}
$1 / 74 \times 10^6 m$	شعاع ماه	
$3 / 84 \times 10^8 m$	شعاع مداری ماه	
$5 / 97 \times 10^{24} kg$	جرم زمین	M_{\oplus}
$5777 K$	دمای خورشید	T_{\odot}
$3 / 85 \times 10^{26} W$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
$1 / 37 \times 10^3 Wm^{-2}$	ثابت خورشیدی	
$-26 / 8$	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
$70 Km s^{-1} Mpc^{-1}$	ثابت هابل	H_0



(۱) در فوریه ۱۹۸۷ در کهکشان ابر ماژلانی بزرگ یک ابرنواختر در حال انفجار دیده شد. مدت کوتاهی بعد از آن، خطوط نشری نازکی از کربن و نیتروژن بسیار یونیده در طیف آن ظاهر شد. خطوط نشری خیلی نازک بودند و احتمالاً از گاز سرد موجود در اطراف ستاره ارسال شده بودند. هنگامی که ابرنواختر خاموش شد، یک بیضی از گاز فروزان در اطراف آن مشاهده شد که ابعاد آن در آسمان در حدود $10'' \times 62''$ بود. این ابعاد احتمالاً معرف یک حلقه‌ی دایره‌ای شکل از ماده است که در صفحه‌ی استوایی ستاره و در مرحله‌ای که ستاره غول قرمز بوده است از آن به بیرون پرتاب شده است و به ظاهر بیضی دیده می‌شود (شکل ۱).



الف) زاویه‌ی تمایل حلقه‌ی ابرنواختر (i) را بدست آورید.

روشن شدن خطوط نشری نازک چندین روز بعد از انفجار ابرنواختر شروع می‌شود. در واقع نور از دو راه به ما می‌رسد: یکی نوری است که مستقیماً از انفجار به ما می‌رسد، و دومی نوری است که از محل انفجار به حلقه‌ی گازی در اطراف ابرنواختر رسیده، گاز را یونیده کرده و سپس نور از گاز به سمت ما گسیل شده است.

ب) اگر شعاع حلقه R باشد، مقدار تأخیر زمانی که نور ابتدا به نقطه‌ی A و سپس به ما می‌رسد، با نوری که مستقیماً از ابرنواختر به سمت ما می‌رسد (t_A) را بدست آورید.

ج) همانند قسمت ب) تأخیر زمانی مربوط به نوری که از طریق نقطه‌ی B به ما می‌رسد (t_B) را بدست آورید.

د) اگر مقادیر اندازه‌گیری شده از تأخیر زمانی، بر حسب روز، عبارت باشند از:

$t_A = 83 \pm 6$ و $t_B = 395 \pm 24$ شعاع R و فاصله‌ی ما از ابرنواختر، d ، را بر حسب روز نوری به دست آورید و خطای مقادیر مربوطه را نیز ذکر کنید.

ه) اگر ابرنواختر در بیشترین روشنایی خود دارای قدر ظاهری $m_v = 4$ باشد، درخشندگی مطلق آن L را بر حسب درخشندگی مطلق خورشید، L_\odot ، به دست آورید و با توجه به قسمت د) خطای آن را نیز ذکر کنید.

(۲) مشاهدات رصدی وجود یک سیاه‌چاله در برخی از کهکشان‌ها را پیش‌بینی می‌کند. برای مدل‌سازی منحنی سرعت

دورانی کهکشان‌هایی که یک سیاه‌چاله در مرکزشان قرار دارد، فرض می‌کنیم که یک جرم نقطه‌ای (سیاه‌چاله) با جرم $M_\odot = 10^6 M_\odot$ در مرکز کهکشان قرار دارد و بقیه‌ی جرم با چگالی $\rho(r) = \rho_0 a^2 / r^2$ در اطراف آن توزیع شده است، که در این رابطه $a = 1 kpc$ و ρ_0 مقادیر ثابتی هستند.

الف) رابطه‌ای برای سرعت دورانی اجرام، حول مرکز کهکشان، $V(r)$ ، به دست آورده و نمودار آن را به صورت تقریبی رسم کنید. فرض کنید اجرام در مدارهای دایره‌ای حرکت می‌کنند.

ب) اگر در شعاع $r = 1pc$ سرعت دورانی ستاره‌ای برابر با $V = 100 Km.s^{-1}$ باشد، مقدار عددی ثابت ρ_0 را بر حسب جرم خورشید بر پارسک مکعب (M_{\odot} / pc^3) به دست آورید.

ج) اگر چگالی $\rho(r)$ تا فاصله‌ای گسترده شده باشد که مقدارش در آنجا $0.001\rho_0$ باشد (به عبارت دیگر لبه‌ی کهکشان جایی است که چگالی در آنجا $0.001\rho_0$ باشد)، مقدار عددی سرعت فرار از لبه‌ی کهکشان را حساب کنید.

۳) در نجوم قدر ستاره‌ها در نواحی مختلف طیفی اندازه‌گیری می‌شود. معمولاً ناحیه‌ی مرئی را به سه ناحیه‌ی U به مرکز ۳۶۵ نانومتر و پهنای ۶۸ نانومتر و B به مرکز ۴۴۰ نانومتر و پهنای ۹۸ نانومتر و V به مرکز ۵۵۰ نانومتر و پهنای ۸۹ نانومتر تقسیم‌بندی می‌کنند. به این روش اصطلاحاً طیف‌سنجی UBV گفته می‌شود. کمیت‌های $U - B$ ، $U - V$ و $B - V$ کمیت‌های بسیار مناسبی در نجوم رصدی هستند. (راهنمایی: $U - B = m_U - m_B$)

چون تضعیف نور ستاره‌ها در محیط‌های مادی تابع طول‌موج نور عبوری است؛ بنابراین ضریب تضعیف نور ستاره نیز برای اندیس‌های U و B متفاوت خواهد بود.

مقدار شار تابشی ستاره پس از عبور از ناحیه‌ی کدر به ضخامت d به صورت $f = f_0 \exp(-k_{\lambda} d)$ کاهش می‌یابد که k_{λ} ضریب تضعیف در طول‌موج λ است و f_0 شار تابشی در بالای جو.

الف) رابطه‌ای برای «قدر ستاره» و در حضور تضعیف به دست آورید.

- اندیس رنگی $U - B$ ستاره‌ای در دو زاویه‌ی صفر و 60° درجه نسبت به سمت‌الرأس به ترتیب 0.8 و 0.6 است. همچنین $B - V$ این ستاره در زاویه‌ی سمت‌الرأسی صفر و 60° درجه به ترتیب دو مقدار 0.6 و 0.7 است.

- مقدار افزایش قدر به دلیل خاموشی جوی در نواحی $U - B$ و $B - V$ را به ترتیب با k_{U-B} و k_{B-V} نشان می‌دهیم.

ب) ضریب خاموشی جو k_{U-B} و k_{B-V} را و همچنین مقدار اندیس رنگ‌های خارج از جوی $(U - B)_0$ و $(B - V)_0$ بدون اثر خاموشی را به دست آورید.

ج) قدر ستاره در ناحیه‌ی U برابر ۶ است. قدر B و V ستاره را بدست آورید.

د) قدر بولومتریک ستاره قدری است که ستاره در تمام طول‌موج طیف دارد. در این‌جا ما تقریباً قدر بولومتریک را از روی مجموع شار دریافتی از سه ناحیه‌ی U ، B و V محاسبه می‌کنیم. با این تعریف قدر بولومتریک این ستاره در بالای جو را محاسبه کنید.

۴) فرض کنید در ابتدای بهار، سیاره‌ی مریخ در حالت مقارنه باشد. شش ماه بعد (ابتدای پاییز) در لحظه‌ی طلوع خورشید، سمت و ارتفاع مریخ از دید ناظری در شهر دوگنبدان با عرض جغرافیایی $30^\circ / 5$ درجه، چقدر خواهد بود؟ (مدار مریخ را بر روی دایره‌البروج و نیم محور مدار مریخ را $1 / 52$ واحد نجومی در نظر بگیرید).

۵) مقارنه دو جرم سماوی زمانی است که دو جرم در آسمان کم‌ترین زاویه را از دید ناظر زمین داشته باشند. در لحظه‌ی مقارنه‌ی دو جرم در منظومه‌ی خورشیدی مرکز هر دو جرم روی یک نصف‌النهار قرار گرفته‌اند و فاصله‌ی زاویه‌ای این دو مرکز $4^\circ / 5$ است.

	M_1	M_2	زمین
T نجومی	۲۲۴/۷	۲۷/۳	۳۶۵/۲۵

دوره تناوب نجومی این اجرام در جدول مقابل آمده است.

۲۴ ساعت بعد، فاصله‌ی زاویه‌ای مرکزهای این دو جرم آسمانی چند درجه خواهد بود؟

(۶)

برخی از ستاره‌ها در طی مراحل مختلف زندگی‌شان، پس از خروج بخشی از جرمشان که از طریق سوخت و ساز هسته‌ای است، تحت گرانش می‌زمیند و تبدیل به کوتوله‌ی سفید می‌شوند. به طور معمول جرم کوتوله‌های سفید از مرتبه‌ی جرم خورشید و شعاعشان از مرتبه‌ی شعاع زمین است. جرم و شعاع سه کوتوله‌ی سفید که هر کدام عضوی از یک منظومه‌ی دوتایی هستند اندازه‌گیری شده و در جدول زیر مقادیر آن‌ها ذکر شده است.

ستاره	جرم (M_{\odot})	شعاع (R_{\odot})
۱	۰/۵	۰/۰۱۸
۲	۰/۸	۰/۰۱۵
۳	۱/۱	۰/۰۱۴

الف) اگر فرض کنیم که رابطه‌ی جرم و شعاع در کوتوله‌های سفید به صورت زیر باشد:

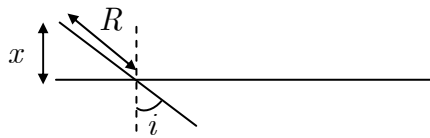
$$\frac{R}{R_{\odot}} = A \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^B$$

با رسم منحنی شعاع - جرم در مقیاس لگاریتمی، در نمودار شماره ۱، مقادیر عددی A و B را به دست آورید.

ب) فرض کنید که کوتوله‌ی سفید مانند جسم سیاه تابش می‌کند، درخشندگی مطلق یک کوتوله‌ی سفید را بر حسب جرم (M) و دمای سطحی (T_E) آن به دست آورید.

ج) نمودار درخشندگی-دمای سطحی یک کوتوله با جرم $M = 1M_{\odot}$ را در مقیاس لگاریتمی در نمودار شماره ۲ رسم کنید.

د) با توجه به قسمت (ج)، اگر درخشندگی کوتوله‌ای به جرم $M = 1M_{\odot}$ و دمای سطحی $T_E = 10^4 K$ در طول زمان ثابت باشد، چه مدت این کوتوله می‌درخشد. یک کوتوله‌ی سفید متشکل از یون‌ها و الکترون‌ها است که فقط انرژی جنبشی یون‌ها می‌توان ساطع شود. مقدار انرژی یون‌ها تقریباً $1/10$ کل انرژی پتانسیل کوتوله است. چگالی جرمی کوتوله را ثابت فرض کنید.



(۱) ابتدا باید طول قطر کوچک‌تر بیضی مورد نظر را حساب کنیم،

که مطابق شکل برابر می‌شود با $x = R \cos i$. حال برای محاسبه‌ی خروج از مرکز

از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم: $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{R \cos i}{R}\right)^2} = \sin i \Rightarrow i = 47^\circ$ که خواسته‌ی قسمت الف مسئله است.

(ب) تنها پارامتر موثر در تأخیر زمانی نور رسیده، اختلاف طول مسیر طی شده است، پس:

$$c = \frac{x}{t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c}, \quad \Delta x = R - R \sin i$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = \frac{R(1 - \sin i)}{c}$$

(ج) مشابه قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$c = \frac{x}{t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c}, \quad \Delta x = R + R \sin i \Rightarrow \Delta t_B = \frac{R(1 + \sin i)}{c}$$

(د) میانگین مدت زمان رسیدن دو باریکه‌ی نور در قسمت‌های (ب) و (ج) برابر است با مدت رسیدن نور باریکه‌ی گسیل شده از مرکز ابرنواختر، پس داریم:

$$t_{average} = \frac{\Delta t_A + \Delta t_B}{2} = \frac{(R - R \sin i) + (R + R \sin i)}{2c} = \frac{2R}{2c} = \frac{83 \pm 6 + 395 \pm 24}{2} = \frac{478 \pm 30}{2}$$

$$\Rightarrow R = c \times \frac{(478 \pm 30) \times 24 \times 60 \times 60}{2} = 6 / 0 \times 10^{15} \pm 3 / 8 \times 10^{14} m = 231 \pm 14 / 6 Ld$$

از طرفی با توجه به داده‌های صورت سوال، ابعاد ظاهری ابرنواختر برابر است با: $1 / 10'' \times 1 / 62''$ که در آن قطر بزرگ‌تر همان R ابرنواختر است. پس از تبدیل بزرگی ظاهری به درجه و سپس به رادیان ($Rad = 7 / 8 \times 10^{-6} = 4 / 5^\circ \times 10^{-4} = 1 / 62''$ ، برای بزرگی ظاهری چنین می‌نویسیم:

$$\theta = \frac{2R}{d} \Rightarrow d = \frac{2 \times (6 / 0 \times 10^{15} \pm 3 / 8 \times 10^{14})}{7 / 8 \times 10^{-6}} = 1 / 58 \times 10^{21} \pm 9 / 7 \times 10^{19} m = 6 / 1 \times 10^7 \pm 3 / 74 \times 10^7 Ld$$

(ه) ابتدا مقدار روشنایی ابرنواختر را، به روش مقایسه‌ای با خورشید اندازه‌گیری می‌کنیم:

$$m_v - m_\odot = -2 / 5 \log \frac{b_v}{b_\odot} \Rightarrow 4 + 26 / 7 = -2 / 5 \log \frac{b_v}{1370} \Rightarrow b_v = 7 / 2 \times 10^{-10}$$

$$b_v = \frac{L_v}{4\pi d_v^2} \Rightarrow L_v = (7 / 2 \times 10^{-10}) \times 4\pi (1 / 58 \times 10^{21} \pm 9 / 7 \times 10^{19})^2 \Rightarrow$$

$$L_v = (7 / 2 \times 10^{-10}) \times 4\pi (1 / 58 \times 10^{21} \pm 9 / 7 \times 10^{19})^2$$

$$= (7 / 2 \times 10^{-10}) \times 4\pi \times (2 / 5 \times 10^{42} \pm 2 \times 1 / 5 \times 10^{41} + 9 / 4 \times 10^{39}) \Rightarrow$$

$$L_v = 2 / 2 \times 10^{34} \pm 2 / 7 \times 10^{33} W$$

(۲) الف) با فرض مدارهای دایروی و از برابر نهمی نیروها داریم: $\frac{GmM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. حال کافیست

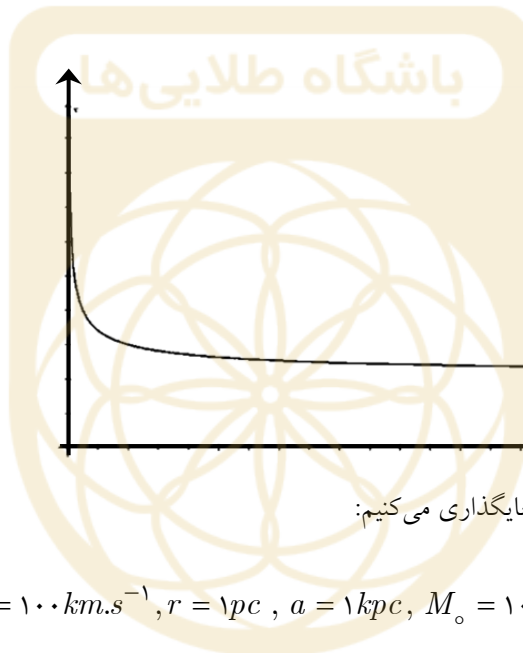
جرم داخلی را برحسب پارامترهای داده شده و با فرض احاطه‌ی ماده‌ی داخلی در فضای گوی‌وار، محاسبه کنیم:

$$M(r) = M_0 + \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad \rho(r) = \rho_0 \frac{a^2}{r^2} \Rightarrow M(r) = M_0 + \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_0 \frac{a^2}{r'^2} dr'$$

$$= M_0 + \int_0^r 4\pi a^2 \rho_0 dr = M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r$$

در نتیجه داریم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r)}{r}}$$



برای ترسیم نمودار، پس از نقطه‌گذاری و بدست‌آوردن رفتار منحنی در نزدیکی مجانب‌هایش، به شکل روبرو می‌رسیم.

(ب) مقادیر عددی را پس از تبدیل واحد جایگذاری می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r)}{r}}, \quad v = 100 \text{ km.s}^{-1}, r = 1 \text{ pc}, a = 1 \text{ kpc}, M_0 = 1.6 M_\odot$$

در نتیجه: $\rho_0 = 7 / 0.9 \times 10^{-21} \text{ (kg / m}^3\text{)}$ می‌شود.

(ج) ابتدا باید ببینیم در چه فاصله‌ای چگالی به اندازه‌ی $0.1 \rho_0$ کاهش می‌یابد؛ با توجه به معادله‌ی تغییرات چگالی و برابرنهی با این مقدار داریم:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{a^2}{r^2} \Rightarrow 0.1 \rho_0 = \rho_0 \frac{1 \text{ kpc}^2}{r^2} \Rightarrow r = 10 \text{ kpc}$$

حال باید سرعت فرار را در این شعاع محاسبه کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_0 + 4\pi a^2 \rho_0 r)}{r}}, \quad r = 10 \text{ kpc}, a = 1 \text{ kpc}, M_0 = 1.6 M_\odot, \rho_0 = 7 / 0.9 \times 10^{-21} \text{ (kg / m}^3\text{)}$$

پس داریم: $v = 106 / 67 \text{ km.s}^{-1}$

الف) مقایسه‌ی قدر ظاهری ستاره در حضور عامل کاهنده، با قدر ظاهری ستاره در شرایط خلأ چنین است:

$$m - m_o = -2 / 5 \log \frac{b}{b_o}, \quad d = d_o \Rightarrow m - m_o = -2 / 5 \log \frac{L}{L_o} = -2 / 5 \log \frac{f}{f_o}, \quad \frac{f}{f_o} = e^{-k_\lambda d}$$

$$\Rightarrow m - m_o = -2 / 5 \log e^{-k_\lambda d} = k_\lambda d (2 / 5 \log e) \Rightarrow$$

$$m = m_o + 1 / 0.8 k_\lambda d$$

ب) با توجه به عبارت بدست آمده در قسمت الف می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$U - U_o = 1 / 0.8 k_U d, \quad B - B_o = 1 / 0.8 k_B d, \quad V - V_o = 1 / 0.8 k_V d$$

حال می‌توانیم مقدار اندیس رنگی را در حضور و بدون حضور جو مقایسه کنیم (با تفریق دو به دوی روابط از هم) مثلاً:

$$(B - V) - (B - V)_o = 1 / 0.8 d (k_B - k_V)$$

از طرف دیگر، مسافت طی شده توسط نور در درون جو نیز از رابطه‌ی $d_z = d \sec Z$ بدست می‌آید؛ لذا داریم:

$$(B - V) - (B - V)_o = 1 / 0.8 d \sec Z (k_B - k_V)$$

حال کفایت این رابطه را برای دو زاویه‌ی سوسویی متفاوتی که در متن سوال آمده، مقایسه کنیم:

$$(B - V)_{Z=60} - (B - V)_o = 1 / 0.8 d \sec 60 (k_B - k_V), \quad (B - V)_{Z=30} - (B - V)_o = 1 / 0.8 d \sec 30 (k_B - k_V)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{(B - V)_{Z=60} - (B - V)_o}{(B - V)_{Z=30} - (B - V)_o} = \frac{\sec 60}{\sec 30} = 2,$$

و طبق صورت سوال: $(B - V)_{Z=60} = -0.7$ و $(B - V)_{Z=30} = -0.6$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(B - V)_o = -0.5$$

بار دیگر همین عملیات را برای شاخص رنگی $U - B$ تکرار می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{(U - B)_{Z=60} - (U - B)_o}{(U - B)_{Z=30} - (U - B)_o} = \frac{\sec 60}{\sec 30} = 2$$

و طبق صورت سوال: $(U - B)_{Z=60} = 0.6$ و $(U - B)_{Z=30} = 0.8$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(U - B)_o = 1$$

ج) قدر ستاره در طیف $U_o = 6$ است؛ با توجه به $(B - V)_o = -0.5$ و $(U - B)_o = 1$ ، داریم:

$$B = 5, \quad V = 5 / 5$$

د) طبق صورت سوال قدر مطلق در طیف آبی چنین بدست می‌آید:

$$(B - V)_o = M_B - M_V, \quad M_V = +4, \quad (B - V)_o = -0.5 \Rightarrow M_B = 3 / 5$$

از طرف دیگر، قدر بولومتریک حاصل برآیند تمامی نورها در تمامی طیف‌هاست یعنی برای سادگی کار و با توجه به تعریف سوال

می‌توانیم در اینجا چنین بنویسیم: $L_{bol} = L_U + L_B + L_V$. بنابراین مطابق معمول برای مقایسه چنین می‌نویسیم:

$$M_{bol} - M_B = -2 / 5 \log \frac{L_{bol}}{L_B} = -2 / 5 \log \frac{L_B + L_U + L_V}{L_B} = -2 / 5 \log \left(1 + \frac{L_U}{L_B} + \frac{L_V}{L_B} \right)$$

حال باید نسبت‌های $\frac{L_U}{L_B}$, $\frac{L_V}{L_B}$ را بدست آوریم:

$$U - B = M_U - M_B = -2 / 5 \log \frac{L_U}{L_B}, \quad V - B = M_V - M_B = -2 / 5 \log \frac{L_V}{L_B}$$

$$\frac{L_V}{L_B} = 0 / 631, \quad \frac{L_U}{L_B} = 0 / 398$$

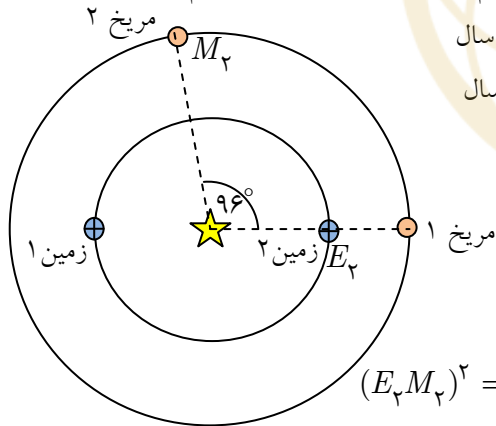
و در نهایت با جایگذاری در عبارت اولیه داریم:

$$M_{bol} = 3 / 5 - 2 / 5 \log \left(1 + 0 / 398 + 0 / 631 \right) = 2 / 73$$

در انتها برای بدست آوردن درخشندگی بولومتريک این ستاره، باید قدر بولومتريک ستاره را با درخشندگی بولومتريک خورشید مقایسه کنیم:

$$m_{bol} - m_{bol\odot} = -2 / 5 \log \frac{L_{bol}}{L_{bol\odot}} \Rightarrow L_{bol} = 6 / 25 L_{bol\odot}$$

(۴) در حالت مقارنه، مریخ دقیقاً در پشت خورشید قرار می‌گیرد. طبق قوانین کپلر $P^2 = a^3$ و با توجه به این‌که نیم‌محور بزرگ مدار مریخ $1 / 52 Au$ است؛ دوره تناوب مداری مریخ را برابر $1 / 87$ سال زمینی بدست می‌آوریم. بعد از گذشت شش ماه، زمین 180° درجه از موقعیت اولیه‌اش جا بجا می‌شود؛ برای محاسبه‌ی موقعیت جدید مریخ هم از تناسب زیر استفاده می‌کنیم:



۱/۸۷ سال	۳۶۰ درجه
۰/۵ سال	x درجه

در نتیجه $x = 96 / 25^\circ$. پس وضعیت قرارگیری دو سیاره نسبت به هم به

قرار مقابل خواهد بود:

حال برای بدست آوردن جدایی زاویه‌ای زمین‌ای و مریخ‌ی در مثلث (زمین-۲ مریخ-۲

- خورشید) از قضیه‌ی کسینوس‌ها و سپس سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} (E_p M_p)^2 &= (E_p \odot)^2 + (M_p \odot)^2 - 2(E_p \odot)(M_p \odot) \cos \theta \\ M_p \odot &= 1 / 52 Au, \quad E_p \odot = 1 Au, \quad \theta = 96^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_p M_p = 1 / 9 Au$$

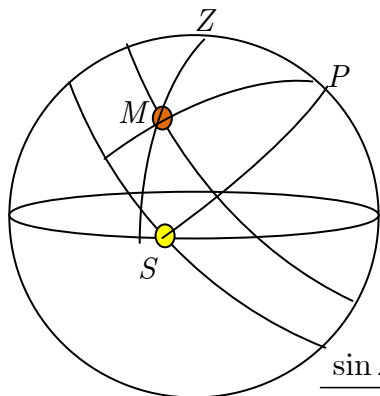
$$\frac{E_p M_p}{\sin 96} = \frac{M_p \odot}{\sin x} \Rightarrow x = 52^\circ$$

حال با نوشتن قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث مسطحه داریم:

از دید ناظر روی زمین ۲، خورشید در نقطه‌ی اول میزان قرار دارد، پس طول دایره‌البروجی مریخ $128^\circ = 180 - 52$ درجه است (یعنی 128° درجه با نقطه‌ی اول حمل فاصله دارد). حال با استفاده از روابط تبدیلی بین دستگاه‌های مختصات، داریم:

$$\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda, \quad \cos \delta \cos \alpha = \cos \lambda \Rightarrow \delta = 18 / 4^\circ, \quad \alpha = 130^\circ$$

بعد خورشید در این تاریخ، ۱۸۰ درجه است، از طرف دیگر زاویه‌ی بین نصف‌النهار مریخ و خورشید برابر تفاوت بُعد این دو جرم سماوی است، یعنی: $\alpha_{\odot} - \alpha_{M_{\text{r}}} = 180 - 130 = 50^{\circ}$. که در شکل زیر با زاویه‌ی MPS مشخص شده است:



حال در کره‌ی آسمان در مثلث ZPM قضیه‌ی کسینوس‌ها را چنین می‌نویسیم:

$$\cos ZM = \cos ZP \cos PM + \sin ZP \sin PM \cos ZPM$$

که در آن $ZPM = 90 - MPS = 40^{\circ}$ و $PM = 90 - \delta = 72^{\circ}$

$ZP = 90 - \varphi = 59 / 5^{\circ}$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی اولیه، مقدار $ZM = 38^{\circ}$

بدست می‌آید. پس ارتفاع مریخ برابر متمام این مقدار یعنی 52° است. برای بدست آوردن

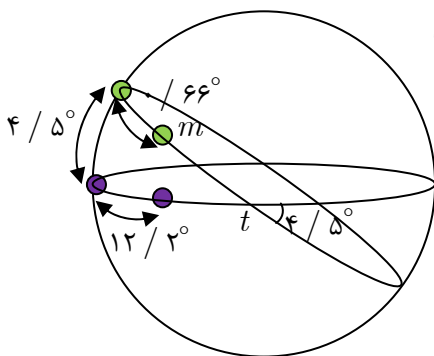
$$\frac{\sin ZM}{\sin ZPM} = \frac{\sin PM}{\sin PZM} \Rightarrow \frac{\sin 38}{\sin 40} = \frac{\sin 72}{\sin A}$$

سمت نیز از قضیه‌ی سینوس‌ها کمک می‌گیریم: $\sin A = \frac{\sin 72 \sin 40}{\sin 38}$. که پس از حل، مقادیر سمت را 83 یا 97 درجه بدست می‌دهد. از این میان تنها پاسخ 97 درجه قابل قبول است. (زیرا با توجه به شکل سمت مریخ شرقی‌تر از سمت خورشید است)

(۵) هر دو جسم روی یک نصف‌النهار قرار دارند. پس، از لحظه‌ی مقارنه دائماً جدایی زاویه‌ای‌شان کاهش می‌یابد؛ بنابراین

جدایی زاویه‌ای این دو در لحظه‌ی مقارنه برابر زاویه‌ی انحراف مداری دو سیاره نسبت به یکدیگر است.

حال با فرض مدارهای دایروی، میزان جابه‌جایی دو سیاره را ظرف مدت یک شبانه روز و بر روی صفحه‌های مداریشان حساب می‌کنیم؛ اما از آنجا که زمین هم به طور هم‌زمان در مدارش جابجا می‌شود، نخست دوره تناوب هلالی دو سیاره را حساب می‌کنیم:



$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_S}$$

سیاره‌ها برابر $29/5$ و $538/93$ روز بدست خواهد آمد. حال با استفاده از تناسب میزان جابه‌جایی سیاره‌ها را ظرف مدت 24 ساعت (اروز) محاسبه می‌کنیم:

روز $29/5$	360 درجه
روز 1	x درجه

که از اینجا مقدار x برابر $12/2$ درجه بدست می‌آید. با تکرار تناسب مشابه، میزان جابه‌جایی سیاره‌ی دوم در طی یک روز را نیز محاسبه می‌کنیم که برابر $0/66$ درجه بدست می‌آید. حال با جایگذاری مقادیر روی شکل، به سادگی و با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توان جدایی‌زاویه‌ای دو سیاره را محاسبه کرد: $\cos ms = \cos mt \cos st + \sin mt \sin st \cos mst$ و $mt = 90 - 0/66 = 89 / 34^{\circ}$

و $st = 90 - 12/2 = 77 / 8^{\circ}$ و $mst = 4 / 5^{\circ}$. پس از جایگذاری در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\cos ms = \cos 89 / 34 \cos 77 / 8 + \sin 89 / 34 \sin 77 / 8 \cos 4 / 5 \Rightarrow ms = 12 / 37^{\circ}$$

الف) از دو طرف معادله، لگاریتم می‌گیریم. با توجه به عبارت لگاریتمی $\log\left(\frac{R}{R_{\odot}}\right) = B \log\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) + \log A$ و

جایگذاری مقادیر عددی، نمودار مورد نظر بدست می‌آید. برای بدست آوردن مقادیر عددی A, B از داده‌های موجود در جدول لگاریتم می‌گیریم؛ اگر خط راست حاصل از این سه نقطه را امتداد دهیم، عرض از مبدأ خط مذکور مقدار A را تعیین می‌کند. با کمک شیب خط مذکور، مقدار عددی B هم تعیین می‌شود. بعد از عددگذاری خواهیم داشت: $A = 0.014$, $B = -0.324$

ب) می‌دانیم درخشندگی از رابطه‌ی $L = 4\pi r^2 \sigma T^4$ بدست می‌آید؛ حال با نوشتن نسبت درخشندگی‌ها داریم:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

و با توجه به صورت سوال داریم: $\frac{R}{R_{\odot}} = A \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^B$. با جایگذاری این مقدار در نسبت درخشندگی‌ها

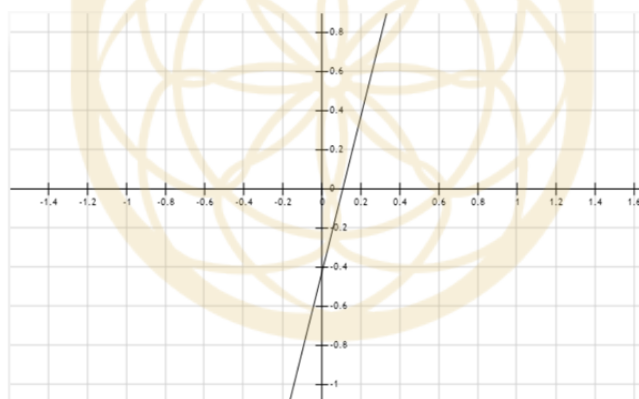
داریم: $\frac{L}{L_{\odot}} = A^2 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{2B} \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$ و مرتبه‌ی جرم کوتوله‌های سفید نزدیک به جرم خورشید است؛ پس داریم:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = A^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$$

ج) برای رسم منحنی لگاریتمی باید از دو طرف رابطه‌ی فوق لگاریتم بگیریم؛ یعنی:

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = \log\left(A^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4\right) = 2 \log A + 4 \log \frac{T}{T_{\odot}}$$

مقدار A را هم از بخش الف بدست آورده بودیم، پس:

$$\log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 4 \log \frac{T}{T_{\odot}} - 3.7 \Rightarrow y = 4x - 3.7$$


د) اگر دمای کوتوله که برابر 10^4 کلوین است را در عبارت بدست آمده در قسمت (ج) جایگزین کنیم؛ مقدار $L = 1/76 L_{\odot}$ بدست می‌آید. حال باید ببینیم که کوتوله‌ای با این درخشندگی چند سال به تابشش ادامه می‌دهد؛ برای این کار باید شرط سوال که انرژی یونها

0.1 انرژی پتانسیل گرانشی باشد را محقق کنیم، لذا داریم: $E_I = 0.1 E_G$ و انرژی پتانسیل گرانشی از رابطه‌ی $E_G = -\frac{3 GM^2}{5 R}$

بدست می‌آید؛ پس از جایگذاری، مقدار انرژی $E_I = 1/64 \times 10^{42} \text{ J}$ بدست می‌آید. حال باید ببینیم، یک کوتوله‌ی سفید این میزان انرژی را ظرف چه مدت می‌سوزاند. آهنگ مصرف سوخت در ستاره‌ها برابر درخشندگی‌شان است، پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$t = \frac{E}{L} = \frac{1/64 \times 10^{42} \text{ J}}{1/76 L_{\odot}}, \quad L_{\odot} = 3/85 \times 10^{26} \text{ J.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow t = 2/4 \times 10^{15} \text{ s} = 7/6 \times 10^7 \text{ year}$$