



نوزدهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

دفترچه سؤالات آزمون مرحله 2 سال تحصیلی 1401-1402

نهایی

نکات بسیار مهم

لطفاً قبل از شروع پاسخگویی به سؤالات، این قسمت را به دقت بخوانید. برای خواندن این قسمت 5 دقیقه وقت اضافه در نظر گرفته شده است.

- 1) این آزمون حاوی 10 سؤال تشریحی است. مجموع کل نمره این آزمون 1000 نمره است که بسته به نوع سؤالات بین 10 سؤال توزیع شده است. در سؤالاتی که بخش‌های الف و ب و ج و ... دارند، نمره هر بخش به تفکیک داده شده است.
- 2) سوالات اول و دوم و سوم سوالات کوتاه هستند. این سوالات به نسبت سوال‌های چهارم تا دهم زمان کمتری لازم دارند و نمره آنها نیز کمتر است.
- 3) دقت کنید که تمامی مقادیر ثابت باید از جدول ثوابت که در ابتدای سؤالات آمده گرفته شوند. اگر شما خواستید سؤالی را از یک روش ابتکاری و جدید حل کنید و نیاز به ثابتی داشتید که در جدول ثوابت نبود، حتماً آن ثابت را در ابتدای پاسخ خود به سؤال، داخل کادر بنویسید. در این مورد اگر راه حل شما درست باشد و پاسخ شما هم در محدوده دقت باشد، نمره کامل خواهید گرفت.
- 4) در بعضی از سوالات در پایان سوال توضیحاتی داده شده که به شما در حل سوال کمک می‌کند و یا توجه به آنها لازم است. پس حتماً قبل از شروع به حل سوال، متن سوال را به طور کامل بخوانید.
- 5) برای دقت و خوانایی بیشتر و ممانعت از محدودیت‌های نرم افزار Microsoft Word فارسی، در این آزمون از اعداد انگلیسی استفاده شده است. شما در پاسخنامه می‌توانید به اختیار خود از اعداد فارسی و یا انگلیسی استفاده کنید.



ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت	
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش	G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور	c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
$1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	ثابت بولتزمن	k
$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	عدد آووگادرو	
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	سال نوری	ly
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک	pc
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	واحد نجومی	AU
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید	M_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید	R_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید	L_{\odot}
+4.74	قدر مطلق خورشید	M_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید	m_{\odot}
5780 K	دمای مؤثر سطح خورشید	T_{\odot}
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین	M_{\oplus}
6380 km	شعاع زمین	R_{\oplus}
-4.6	کمترین قدر ظاهری سیاره زهره	
23.5°	تمایل محور زمین	ϵ

قدر کم نورترین ستاره قابل مشاهده با چشم غیر مسلح = 6.0

قطر مردمک چشم انسان = 6 میلیمتر

سؤال اول: (35 نمره)

کوئوله سفیدی به جرم $m = 1M_{\odot}$ را در نظر بگیرید که از ستاره همدم خود با آهنگ $10^{-9} M_{\odot} yr^{-1}$ هیدروژن را می بلعد. این فرایند به مدت 10^5 سال ادامه پیدا می کند. سپس هیدروژن بلعیده شده به یکبارہ و در مدت 90 روز می سوزد و به هلیوم تبدیل می شود. درخشندگی تولید شده در این فرایند چند برابر درخشندگی خورشید است؟ (در مجموعه واکنش های هسته ای هیدروژن سوز 0.7 درصد ماده هیدروژنی به انرژی تبدیل می شود)

پاسخ:

$$\Delta m = \dot{m}\Delta t = 10^{-9}M_{\odot} \times 10^5 = 10^{-4}M_{\odot}$$

$$E_{\text{تولیدی}} = \frac{0.7}{100}\Delta mc^2 = \frac{0.7}{100}10^{-4}(1.99 \times 10^{30}) \times (3 \times 10^8)^2 = 1.254 \times 10^{41} J$$

$$L_{\text{تولیدی}} = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1.254 \times 10^{41}}{90 \times 24 \times 3600} = 1.61 \times 10^{34} W \rightarrow \frac{L}{L_0} = 4.19 \times 10^7$$

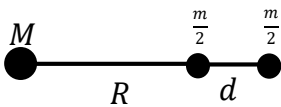


سؤال دوم : (45 نمره)

فضانوردی را در نظر بگیرید که به درون یک سیاهچاله سقوط می کند. در اثر نزدیکی به سیاهچاله و به دلیل تغییرات شدید میدان گرانش، بدن فضانورد در راستای قد او کشیده می شود. حداکثر کشیدگی که فضانورد می تواند تحمل کند 1000 نیوتن است. اگر جرم این فضانورد را 100 کیلوگرم و قد او را 2 متر در نظر بگیریم، جرم سیاهچاله در چه شرایطی باید صدق کند تا فضا نورد بتواند به سلامت از افق حادثه سیاهچاله (شعاع شوارتزشیلد) عبور کند.

پاسخ:

سیستم را به صورت یک جرم مرکزی M (سیاهچاله) و دو جرم $\frac{m}{2}$ در فاصله R از سیاهچاله و d از یکدیگر در نظر می گیریم:



شرط مسئله به این صورت است که اختلاف نیروی وارد شده به دو طرف فضانورد باید کمتر از 1000N باشد.

$$\Delta F = \left| -\frac{GM \frac{m}{2}}{R^2} + \frac{GM \frac{m}{2}}{(R+d)^2} \right| \leq 1000N, R = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\rightarrow \Delta F = \frac{GM \frac{m}{2}}{R^2} \left(-\frac{1}{\left(1 + \frac{d}{R}\right)^2} + 1 \right) \approx \frac{GM \frac{m}{2}}{R^2} \times \frac{2d}{R} = \frac{GMmd}{R^3} = \frac{GMmd}{8G^3 M^3 / c^6} = \frac{c^6 md}{8G^2 M^2} \leq 1000N$$

$$\rightarrow M \geq \sqrt{\frac{c^6 md}{8G^2 \times 1000N}} \rightarrow M \geq 32.0 \times 10^2 M_{\odot}$$

$$F = \frac{GMm}{R^2} \leq 1000N \rightarrow \frac{GMm}{\frac{4G^2 M^2}{c^4}} \leq 1000N \rightarrow M \geq \frac{c^4 m}{4G \times 1000} = 1.52 \times 10^{12} M_{\odot}$$

سؤال سوم : (45 نمره)

تعداد ستاره هایی که با چشم غیر مسلح (حداکثر قدر ظاهری 6) در کل آسمان قابل مشاهده است حدوداً 6000 تاست. فرض کنید عالم کاملاً همگن و تمامی این ستاره ها خورشیدگون هستند. در این صورت قدر ستاره ای که شار آن معادل کل شار دریافتی از این ستاره ها باشد چقدر است؟ قدر به دست آمده را با قدر سیاره زهره مقایسه کنید.

پاسخ:

چگالی همگن ← $n = cte$

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 8.87 \times 10^{-51} m^{-3}, \quad N = 6000$$

$$R: \text{farthest visible star} \rightarrow 6 - M_{\odot} = -2.5 \log\left(\frac{(1AU)^2}{R^2}\right) \rightarrow R = 5.45 \times 10^{17} m$$

$$db = \frac{dL}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot} dN}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \times n 4\pi r^2 dr = n L_{\odot} dr$$

$$b_{tot} = \int_0^{b_{tot}} db = \int_0^R n L_{\odot} dr = n L_{\odot} R = L_{\odot} \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} R = \frac{3L_{\odot} N}{4\pi R^2} = 1.86 \times 10^{-6} \text{ watt}$$

$$m - M_{\odot} = -2.5 \log\left(\frac{b_{tot}}{b_{\odot}}\right), \quad b_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1AU)^2} \rightarrow \frac{b_{tot}}{b_{\odot}} = \frac{3N(1AU)^2}{R^2} \Rightarrow m = -4.64$$

$$m_{Venus} = -4.6$$

تقریباً برابرند.

سوال چهارم: (70 نمره)

اخترشناسان از انتقال به سرخ z برای تعیین فاصله و یا به عنوان معیاری از زمان در کیهان شناسی استفاده می کنند. انتقال به سرخ نمایانگر زمانی است که اندازه عالم $\frac{1}{1+z}$ برابر اندازه کنونی بوده است. اخیراً تلسکوپ فضایی جیمز وب ستاره‌های دو کهکشان دور دست را طیف نگاری کرده است. این دو کهکشان به ترتیب در انتقال به سرخ های $z_{g1} = 11$ و $z_{g2} = 13$ قرار دارند. بر مبنای اطلاعات طیفی به نظر می رسد سن ستاره های این دو کهکشان به ترتیب $\tau_1 = 400 \text{ Myr}$ و $\tau_2 = 200 \text{ Myr}$ باشد. فرض کنید کمیت z_f انتقال به سرخ مرتبط با زمانی را نشان می دهد که ستاره های هر کدام از این دو کهکشان متولد شده اند.

(الف) عبارتی کلی برای z_f بر حسب z_g و τ به دست آورید. (45 نمره)

(ب) مقدار عددی z_f را برای دو کهکشان بالا حساب کنید. (25 نمره)

سن فعلی عالم را 13.8 میلیارد سال، عالم را ماده غالب و رابطه ضریب مقیاس با زمان را به شکل $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ در نظر بگیرید.

پاسخ:

$$\begin{cases} z_{g1} = 11, z_{g2} = 13 \\ \tau_1 = 400 \text{ Myr}, \tau_2 = 200 \text{ Myr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_0 = 13.8 \text{ Myr} \\ a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

(الف)

$$\frac{a(z)}{a_0} = \frac{1}{1+z}, a_0 = 1 \rightarrow a(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t_f = t_g - \tau \rightarrow a(t_f) = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a(z_f)$$

$$\rightarrow (1+z_f)^{-1} = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow z_f = \left(\frac{t_g - \tau}{t_0}\right)^{-\frac{3}{2}} - 1$$

$$\frac{1}{1+z_g} = a(z_g) = a(t_g) = \left(\frac{t_g}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{t_g}{t_0} = (1+z_g)^{-\frac{3}{2}}$$

$$z_f = \left[(1+z_g)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\tau}{t_0} \right]^{-\frac{2}{3}} - 1$$

(ب)

$$t_{g1} = 332 \text{ Myr}$$

$$t_{g2} = 263 \text{ Myr}$$

$$z_{f1} = 33.5 \text{ Myr}$$

$$z_{f2} = 35.2 \text{ Myr}$$

سوال پنجم : (115 نمره)

رصدخانه ملی ایران (INO340) در قله گرگش واقع در 33 کیلومتری جنوب کاشان و در ارتفاع 3600 متری از سطح دریا قرار دارد. این رصدخانه مجهز به یک تلسکوپ از نوع ریچی کرتین و با میدان دید 20 دقیقه قوس است. قطر آینه اصلی آن 3.4 متر و نسبت کانونی تلسکوپ 11.24 است. این تلسکوپ در تاریخ پنجم مهرماه 1401 اولین نور خود را دریافت کرد که در طی آن از کهکشان NGC23 با توان تفکیک 0.65 ثانیه قوسی تصویر برداری کرد. پارامتر دید محل رصدخانه در شب های مختلف بین 0.55 تا 0.7 ثانیه قوس متغیر است.

(الف) حد قدری نظری این تلسکوپ چقدر است؟ (20 نمره)

(ب) قدرت تفکیک زاویه ای نظری این تلسکوپ در ناحیه مرئی ($\lambda = 500 \text{ nm}$) چند ثانیه قوس است؟ (15 نمره)

(ج) فاصله کانونی موثر تلسکوپ چند میلیمتر است؟ (10 نمره)

(د) مقیاس صفحه این تلسکوپ چند ثانیه قوس بر میلیمتر است؟ (20 نمره)

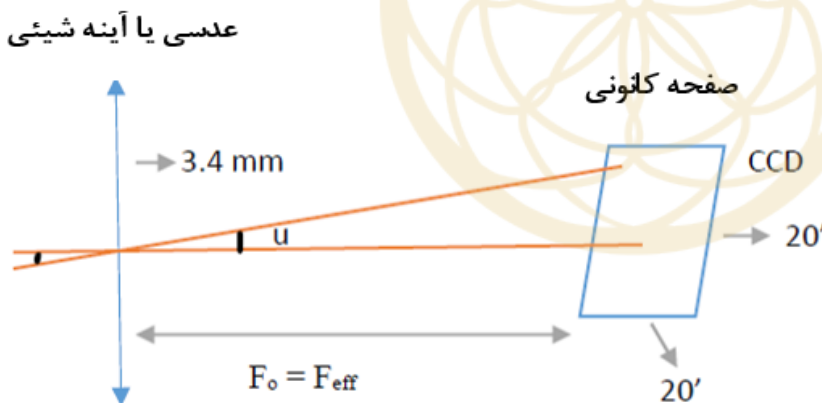
(ه) ابعاد CCD مورد استفاده در INO340 چقدر باید باشد؟ (20 نمره)

(و) اگر پیکسل های CCD مربعی و به ابعاد 20 میکرومتر باشند، CCD آن باید حدوداً چند مگاپیکسل داشته باشد؟ (15 نمره)

(ز) هر پیکسل تقریباً چند ثانیه قوس را پوشش خواهد داد؟ (15 نمره)

یاسخ:

(دو داده آخر مساله در حل استفاده ندارند)



(الف) با استفاده از اعداد نوشته شده در جدول ابتدای سوالات برای چشم:

$$L_M = 5 \log \frac{D}{D_{eye}} + m_{eye} = 5 \log \frac{3.4 \times 10^3}{6} + 6 = 19.77$$

(ب) اگر رابطه زاویه تفکیک را بر حسب ثانیه قوسی بنویسیم:

$$\theta'' = 2.5 \times 10^5 \frac{5 \times 10^{-7}}{3.4} = 0.03676''$$

(ج) با توجه به رابطه تعریف نسبت کانونی:

$$F_{\#} = \frac{F_0}{D} = \frac{F_{eff}}{D}$$

$$F_{eff} = F_{\#} \times D = 11.24 \times 3.4 = 38.216 \text{ m} = 38216 \text{ mm}$$

د) می‌خواهیم زاویه مقابل به 1mm روی صفحه کانونی تلسکوپ را بیابیم:

$$\tan u' = \frac{1 \text{ mm}}{F_{eff}} = \frac{1 \text{ mm}}{38216 \text{ mm}} \rightarrow u' = 0.0015 \frac{\text{درجه}}{\text{mm}} = 5.397 \frac{\text{ثانیه قوس}}{\text{mm}}$$

ه) اگر از میدان دید که 20 دقیقه قوسی برای ابعاد آشکارساز CCD استفاده کنیم:

$$\tan \frac{20'}{60'} = \frac{\text{ابعاد CCD}}{38.216 \text{ m}} \rightarrow \text{ابعاد CCD} = 38.216 \times \tan \frac{1}{3} = 0.222 \text{ m}$$

بنابراین هر ضلع CCD حدود 22/2 سانتیمتر است.

و) از نسبت ابعاد CCD می‌توان یافت:

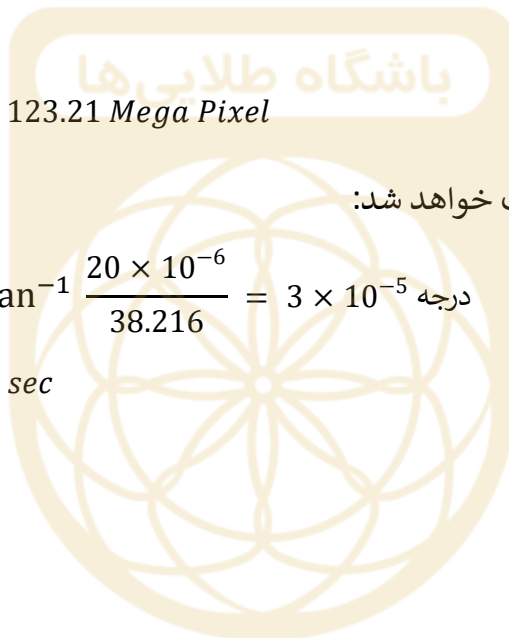
$$\text{Pixel Size } (a) = 20 \mu\text{m}$$

$$\frac{\text{ابعاد CCD}}{\text{اندازه پیکسل}} = \frac{22.2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-5}} = 123.21 \text{ Mega Pixel}$$

ز) مقداری که روی هر پیکسل ثبت خواهد شد:

$$u'' = \tan^{-1} \frac{\text{اندازه پیکسل}}{\text{فاصله کانونی}} = \tan^{-1} \frac{20 \times 10^{-6}}{38.216} = 3 \times 10^{-5} \text{ درجه}$$

$$3 \times 10^{-5} \times 3600 = 0.108 \text{ arc sec}$$



سؤال ششم : (115 نمره)

از روی میانگین شهاب های مشاهده شده در روز تخمین زده می شود که روزانه حدود 44000 کیلوگرم شهاب سنگ وارد جو زمین شده، می سوزد و به صورت گرد و غبار روی سطح زمین می نشیند. شهاب سنگ ها ذرات سرگردانی هستند که زمین با عبور خود از میان آنها (ناشی از گردش به دور خورشید) آنها را جارو می کند. سرعت میانگین این ذرات در منظومه شمسی نسبت به سرعت زمین به دور خورشید ناچیز است.

(الف) با فرض جسم سیاه بودن زمین، مقدار درخشندگی زمین ناشی از دریافت انرژی از خورشید را محاسبه کنید. (25 نمره)

(ب) نسبت انرژی آزاد شده یک شهاب سنگ به جرم m ناشی از گرانش (انرژی گرانشی ناشی از افتادن ذره روی سطح زمین) به انرژی آزاد شده ناشی از هم سرعت شدن شهابسنگ با زمین (در اثر برخورد و اصطکاک شهاب سنگ با جو) را به دست آورید. (35 نمره)

(ج) اگر انرژی تمام شهابسنگها به صورت درخشندگی تابش شود، نسبت درخشندگی شهاب سنگ ها (L_{acc}) به درخشندگی زمین (قسمت الف) چقدر است؟ (35 نمره)

(د) خاکستر شهاب سنگ ها به صورت گرد و غبار روی سطح زمین می نشیند. چند سال زمان لازم است تا یک سانتیمتر گرد و غبار ناشی از شهابسنگها روی زمین جمع شود؟ چگالی گرد و غبار حدوداً $3 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$ است. (20 نمره)

پاسخ:

(الف)

$$L_{earth} = \frac{L_{sun}}{4\pi r^2} \pi R_{earth}^2 = \frac{3.85 \times 10^{26}}{4 \times (1.5 \times 10^{11})^2} \times (6380 \times 10^5)^2 = 1.74 \times 10^{17} \omega$$

(ب)

$$\frac{E_G}{E_v} = \frac{\frac{GM_e m}{R}}{\frac{1}{2} m v^2} = \frac{2GM_{earth}}{\frac{GM_{sun} R}{r}} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^{11} \times 5.97 \times 10^{24}}{1.99 \times 10^{30} \times (6380 \times 10^3)^2} = \frac{6.247 \times 10^7 m}{4.427 \times 10^8 m} = 0.141$$

(ج)

$$E_T = (E_G + E_v) \rightarrow L_{acc} = \frac{E_T}{1 \text{ day}} = \frac{(0.625 + 4.427) \times 44000 \times 10^8}{24 \times 3600} = 2.57 \times 10^8 \omega$$

$$\frac{L_{acc}}{L_{earth}} = 1.48 \times 10^{-9}$$

(د)

$$v_{dust} = A_{earth} \times 1 \text{ cm} = 4 \pi R_{earth}^2 \times 1 \text{ cm} = 4 \pi (6380 \times 10^3)^2 \times 10^{-2} = 5.11 \times 10^{12} \text{ m}^3$$

$$M_{dust} = \rho v = 1.534 \times 10^{16} \text{ kg}$$

$$\frac{M_{dust}}{M_{1 \text{ day}}} = \frac{1.534 \times 10^{16}}{44000} = 3.5 \times 10^{11} \text{ days} = 9.56 \times 10^8 \text{ years}$$

سؤال هفتم : (125 نمره)

می خواهیم از رابطه جرم-درخشندگی ادینگتون، به رسم دقیقی از رشته اصلی ستارگان بر روی نمودار هرتسپرونگ-راسل برسیم! اگر رابطه ضابطه مند ادینگتون برای محدوده های جرمی مختلف ستارگان رشته اصلی بصورت زیر باشد

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & M \leq 0.6M_{\odot} \\ M^{4.5} & 0.6 M_{\odot} < M \leq 4M_{\odot} \\ M^3 & 4M_{\odot} < M \end{cases}$$

و همچنین بدانیم رابطه دمای درونی (T_I) در این ستارگان با دمای سطحی (T_S) آنها، برحسب عمق اپتیکی (τ) بصورت

$$T_I = T_S(\tau + 1)^{\frac{1}{4}}$$

است.

الف) ابتدا دمای سطحی این ستارگان را به صورت تابعی از جرم و شعاعشان به دست آورید. (25 نمره)

ب) اگر بخواهیم برای ستارگان رشته اصلی رابطه ای توانی بین شعاع و جرمشان بیابیم، برای هر محدوده جرمی توان این رابطه را بدست آورید. (40 نمره)

ج) با استفاده از رابطه بدست آمده و علم به این مطلب که بر روی نمودار هرتسپرونگ-راسل می توان درخشندگی را برحسب دمای سطحی رسم کرد، در بازه های جرمی مختلف ابتدا رابطه میان این دو کمیت را برای ستارگان رشته اصلی بدست آورید و سپس بر روی نموداری که در پاسخ نامه ی این سوال به شما داده شده است، خطوط ضابطه مند مربوط به ستارگان رشته اصلی را ترسیم نمایید. (60 نمره)

توجه: مقدار عمق نوری در مرکز تمامی ستاره های رشته اصلی تقریباً یکسان و برابر 10^{12} است. روی سطح ستاره دمای گاز را تقریباً برابر دمای موثر در نظر بگیرید

پاسخ:

چون در انتها برای همه ستارگان عمق اپتیکی در مرکز را تقریباً یکسان و 10^{12} گرفته است.

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & M \leq 0.6M_{\odot} \\ M^{4.5} & 0.6 M_{\odot} < M \leq 4M_{\odot} \\ M^3 & 4M_{\odot} < M \end{cases}$$

$$T_I = T_S(\tau + 1)^{\frac{1}{4}} \rightarrow T_I \cong 10^3 T_{eff}$$

زیرا در اولین بخش ما در تقریب خطی سازی دمای مرکز ستاره را باید جایگذاری نماییم، اما در نمودار HR دمای موثر داریم.

الف)

با استفاده از تعادل هیدرواستاتیک برای این ستارگان داریم:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{-G M(r) \rho(r)}{r^2}$$

$$\text{خطی سازی: } \frac{P_c}{R} = \frac{M \frac{M}{R^3}}{R^2} \rightarrow P_c \propto \frac{M^2}{R^4}$$

$$P = \frac{\rho k T}{\bar{m}} \rightarrow P_c \propto \frac{M}{R^3} \cdot T_c \rightarrow T_c \propto \frac{M}{R} \rightarrow T_{eff} \propto \frac{M}{R}$$

ب) اگر از رابطه تابندگی استفاده کنیم:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow L \propto R^2 T^4 \equiv M^\alpha$$

$$R^2 \left(\frac{M}{R}\right)^4 \propto M^\alpha \rightarrow \frac{M^4}{R^2} \propto M^\alpha \rightarrow M^{4-\alpha} \propto R^2 \rightarrow R \propto M^{\frac{4-\alpha}{2}}$$

$$R \propto \begin{cases} M^{0.75} & M \leq 0.6M_\odot \\ M^{-0.25} & 0.6M_\odot < M \leq 4M_\odot \\ M^{0.5} & 4M_\odot < M \end{cases}$$

ج) اگر توان‌های ضابطه‌ای بالا را β فرض کنیم:

$$L \propto R^2 T^4, R \propto M^\beta, T \propto \frac{M}{R}$$

$$T \propto \frac{R^{\frac{1}{\beta}}}{R} \propto R^{\frac{1}{\beta}-1} \propto R^{\frac{1-\beta}{\beta}} \rightarrow R \propto T^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

$$L \propto R^2 T^4 \propto T^{\frac{2\beta}{1-\beta}} \cdot T^4 \propto T^{\frac{2\beta+4-4\beta}{1-\beta}} \rightarrow L \propto T^{\frac{4-2\beta}{1-\beta}}$$

$$L \propto \begin{cases} M^{\frac{2.5}{0.25}} \equiv M^{10} & M \leq 0.6M_\odot \\ M^{\frac{4.5}{1.25}} \equiv M^{3.6} & 0.6M_\odot < M \leq 4M_\odot \\ M^{\frac{3}{0.5}} \equiv M^6 & 4M_\odot < M \end{cases}$$

برای رسم یک نمودار تمام لگاریتمی توان بصورت شیب ظاهر می‌گردد:

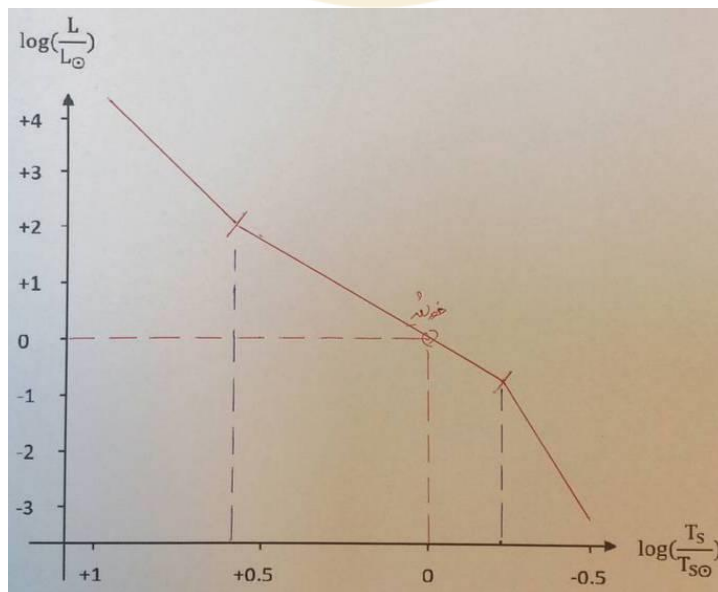
$$\text{شیب نمودار تمام لگاریتمی} = \frac{\frac{\Delta y (cm)}{\text{طول سیکل عمودی (cm)}}}{\frac{\Delta x (cm)}{\text{طول سیکل افقی (cm)}}}$$

7.8 cm طول سیکل افقی

$$\text{طول سیکل عمودی} \quad 1.25 \text{ cm} \equiv \frac{7.8}{1.25} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

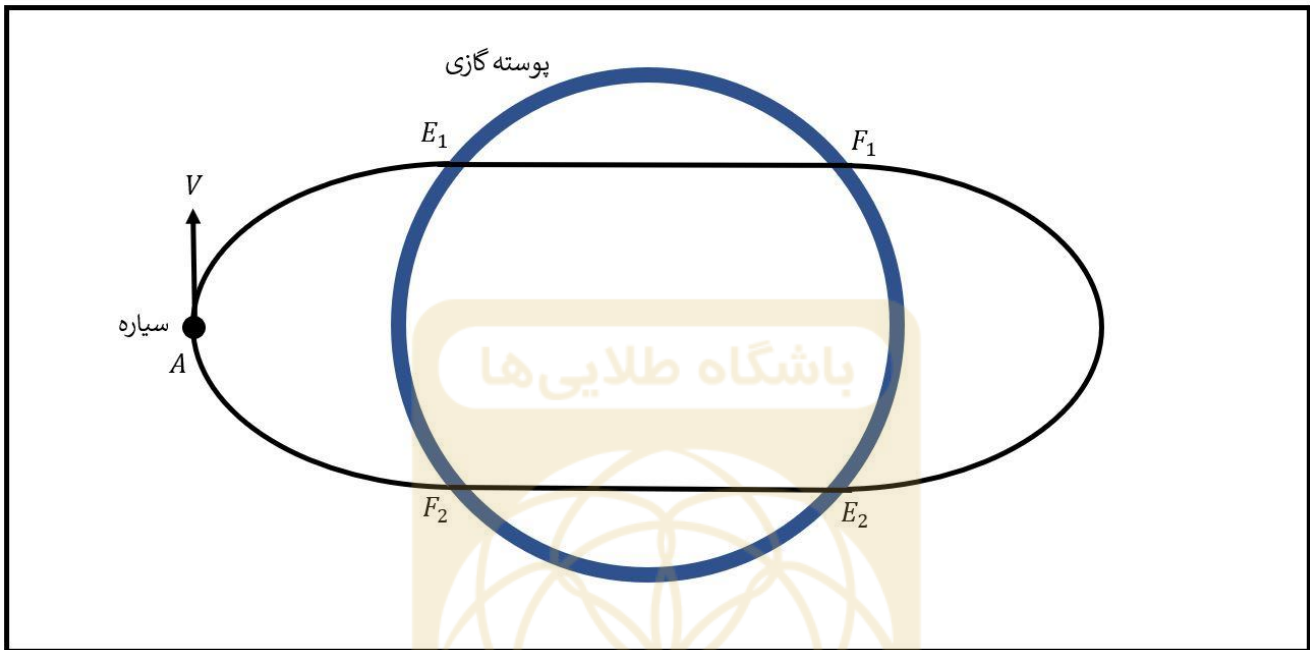
در نتیجه مقادیر شیب باید این گونه باشد

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \propto \begin{cases} 1.6 \equiv 58^\circ \\ 0.58 \equiv 30^\circ \\ 0.96 \equiv 43.9^\circ \end{cases}$$



سؤال هشتم : (140 نمره)

فرض کنید ستاره‌ای با ساختار غیرعادی داریم به صورتی که هسته ستاره منفجر شده و ذرات آن به بیرون پراکنده شده‌اند و این اتفاق باعث شده تا ستاره به پوسته‌ای گازی کروی شکل و رقیق که جرم آن به اندازه جرم ستاره و ضخامت آن در مقابل شعاع پوسته کوچک است تبدیل شود. سیاره‌ای به دور این ستاره در گردش است. مطابق شکل زیر سیاره در ابتدا در نقطه A قرار دارد جاییکه بردار سرعت آن V بر شعاع مداری سیاره عمود است. مدار سیاره به پوسته کروی نزدیک است به گونه‌ای که در نقطه E_1 سیاره وارد پوسته کروی می‌شود و مسیر نقطه E_1 تا F_1 را درون پوسته طی می‌کند و در نقطه F_1 از پوسته خارج می‌شود. در ادامه مسیر دوباره در نقطه E_2 وارد و در نقطه F_2 از پوسته خارج می‌شود و در نهایت به نقطه A می‌رسد و مدار کامل می‌شود.



اگر جرم پوسته $1.2 M_{\odot}$ و شعاع آن $1.5 R_{\odot}$ و فاصله اولیه سیاره تا مرکز ستاره $2.1 R_{\odot}$ باشد آنگاه:

(الف) سرعت اولیه (V) سیاره باید چقدر باشد تا این حرکت به این گونه انجام شود؟ (50 نمره)

(ب) مدت زمان یک دوره تناوب کامل سیاره چقدر است؟ (45 نمره)

(ج) آیا مقدار غیرصفر دیگری برای سرعت سیاره در آن نقطه وجود دارد که در نهایت به همان نقطه اول بازگردد؟ اگر این امکان وجود ندارد با استدلال توضیح دهید و اگر وجود دارد یک مثال بزنید. (45 نمره)

پاسخ:

(الف) نقطه A اوج مدار

$$r_A = a(1 + e) \rightarrow 2.1R_{sun} = a(1 + e)$$

مسیر E_1 تا F_1 مسیر مستقیم است و اگر دستگاهی را تعریف کنیم که مرکز آن مرکز ستاره است و راستای x آن در جهت A ، در این دستگاه در نقطه E_1 سرعت راستای y صفر است.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = 1.5R_{sun} , \quad v_y = \frac{\mu}{h}(e + \cos \theta) = 0 \rightarrow \cos \theta = -e \quad \text{در نقطه } E_1$$

$$r = 1.5R_{sun} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a \rightarrow a = 1.5R_{sun}$$

$$e = \frac{2.1R_{sun}}{1.5R_{sun}} - 1 = 0.4 \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 - e}{1 + e}} = 255.6 \text{ km/s}$$

(ب)

$$T = 4t_{AE_1} + 2t_{E_1F_1}$$

$$t_{AE_1}: \cos \theta = -e \rightarrow r = a, r = a(1 - e \cos E) \rightarrow E_{E_1} = \frac{\pi}{2}, E_A = \pi$$

$$\omega t_{AE_1} = E_A - E_{E_1} - e(\sin E_A - \sin E_{E_1}) = \frac{\pi}{2} - 0.4(-1) = \frac{\pi}{2} + 0.4$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 3.72 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$\rightarrow t_{AE_1} = 5300s$$

$$v_{E_1} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_{E_1}} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{GM \left(\frac{1}{a} \right)} = 390.5 \text{ km/s}$$

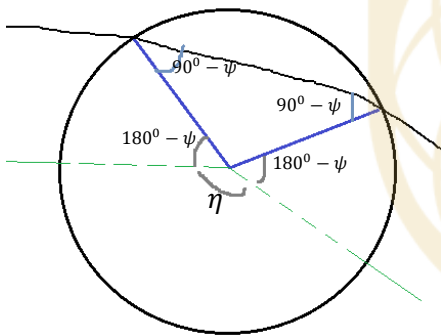
$$t_{E_1F_1} = \frac{d_{E_1F_1}}{v_{E_1}} = \frac{2ae}{v_{E_1}} = 2151.3s$$

$$T = 25502 \text{ s} = 7^h 5^m$$

باشگاه طلاییها

(ج)

در یک بار رخ دادن این اتفاق مدار به اندازه η درجه می چرخد. اگر θ آنومالی حقیقی و ψ زاویه پرواز باشد، آنگاه:



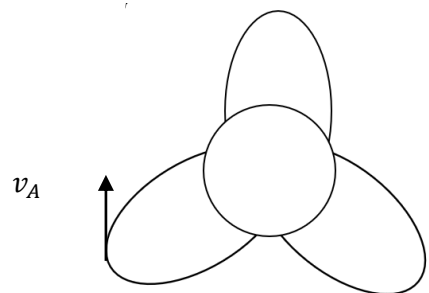
$$\eta = 360^\circ - 2(180^\circ - \theta) - (180^\circ - 2(90^\circ - \psi)) = 2\theta - 2\psi$$

حال اگر η ضریب $\frac{p}{q}$ ای از 2π باشد بعد از q بار دور زدن جسم به جای اول باز می گردد پس شرط مساله:

$$2\theta - 2\psi = 2\pi \frac{p}{q} \mid p, q \in N$$

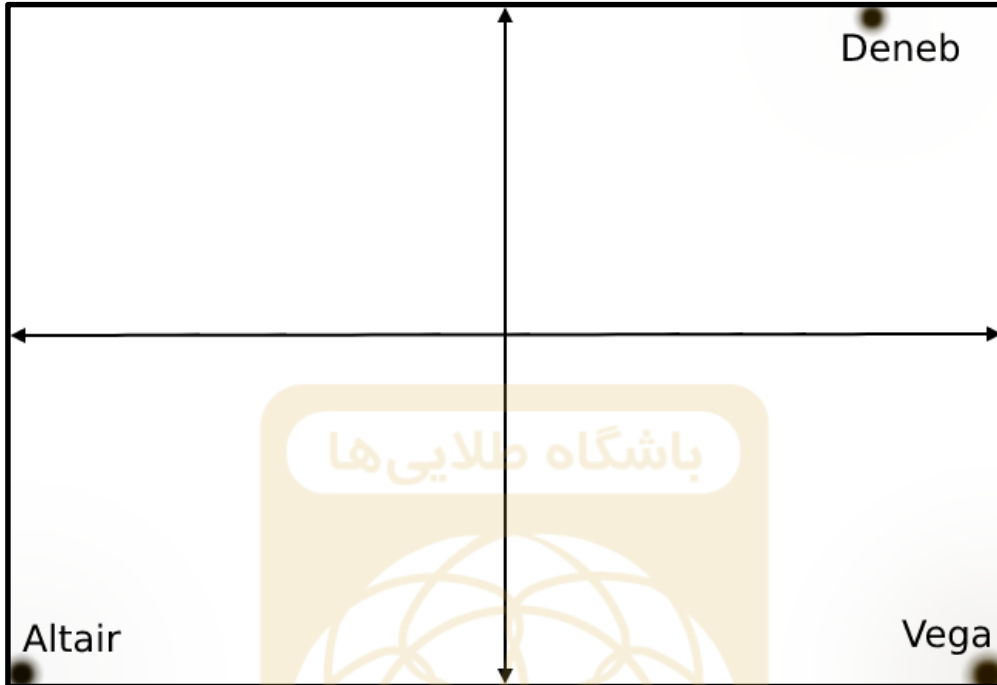
سپس بعد از یافتن θ ، v_A را می یابیم.

مثال:



سؤال نهم : (170 نمره)

رصدگری در یک شب تابستانی در حال عکاسی از آسمان است و تصمیم می‌گیرد که از مثلث تابستانی عکس بگیرد. این رصدگر به دنبال آن است که عکسی از این مثلث بگیرد که کمترین مساحت از آسمان را اشغال کرده باشد. این رصدگر بعد از تلاش‌های بسیار توانسته است عکس زیر را بگیرد که با توجه به اینکه ستارگان وگا و الطیر در دو گوشه تصویر هستند و ستاره دنب نیز بر روی ضلع بالای آن است کمترین مساحت را از آسمان اشغال کرده است.



مختصات این سه ستاره به صورت زیر است:

$$\text{Vega: } \alpha = 18^{\text{h}} 37^{\text{m}} \quad \delta = 38.8^{\circ}$$

$$\text{Altair: } \alpha = 19^{\text{h}} 51^{\text{m}} \quad \delta = 8.9^{\circ}$$

$$\text{Deneb: } \alpha = 20^{\text{h}} 42^{\text{m}} \quad \delta = 45.3^{\circ}$$

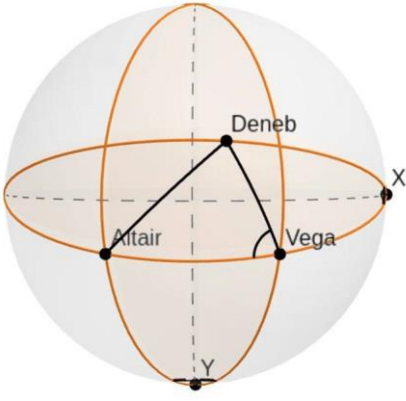
الف) با استفاده از مختصات این سه ستاره ابعاد عکس را بدست بیاورید. (ابعاد زاویه ای پیکان‌های روی عکس را به دست آورید، 110 نمره)

ب) مساحت این عکس چند استرادیان است؟ (60 نمره)

زاویه η داخل پاسخ‌ها همان زاویه Deneb-Vega-Altair هست

پاسخ:

الف) خطوط بالا پایین و چپ و راست تصویر دوائر عظیمه ای هستند که دو به دو اگر امتداد یابند به نقاط X, Y می‌رسند. زوایای راس X, Y را x, y می‌نامیم با توجه به این که فاصله این دو نقطه از مرکز تصویر 900 است، پس x, y همان عرض و طول تصویر اند.



$$\cos\theta_{pA} = \sin\delta_A \sin\delta_D + \cos\delta_A \cos\delta_D \cos(\alpha_A - \alpha_D)$$

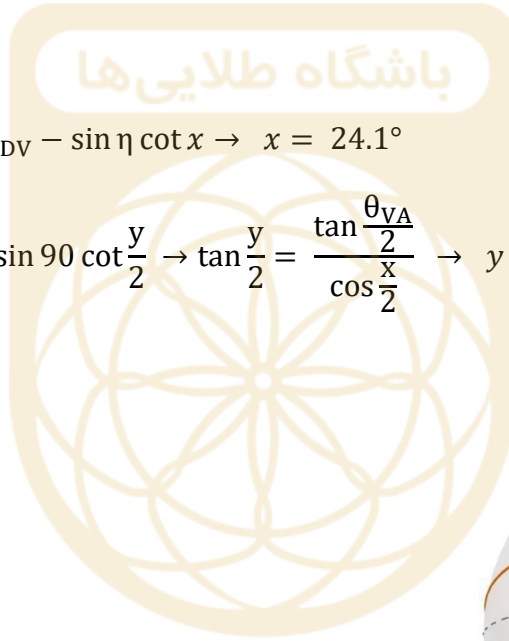
$$\theta_{DA} = 38^\circ, \theta_{DV} = 23.8^\circ, \theta_{VA} = 34.3^\circ$$

$$\cos\eta = \frac{\cos\theta_{DA} - \cos\theta_{DV}\cos\theta_{VA}}{\sin\theta_{DV}\sin\theta_{VA}} \rightarrow \eta = 81.8^\circ$$

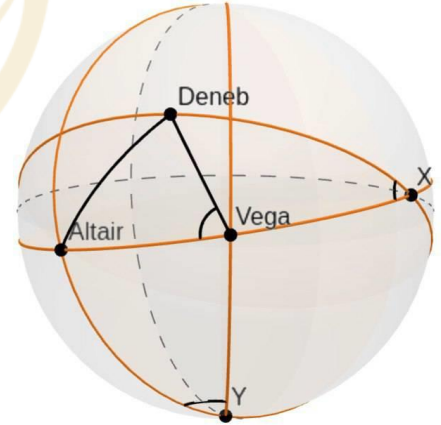
$$XV = 90^\circ - \frac{\theta_{VA}}{2}$$

$$-\sin\frac{\theta_{VA}}{2} \cos\eta = \cos\frac{\theta_{VA}}{2} \cot\theta_{DV} - \sin\eta \cot x \rightarrow x = 24.1^\circ$$

$$\sin\frac{x}{2} \cos 90 = \cos\frac{x}{2} \cot\frac{\theta_{VA}}{2} - \sin 90 \cot\frac{y}{2} \rightarrow \tan\frac{y}{2} = \frac{\tan\frac{\theta_{VA}}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \rightarrow y = 35^\circ$$



(ب)



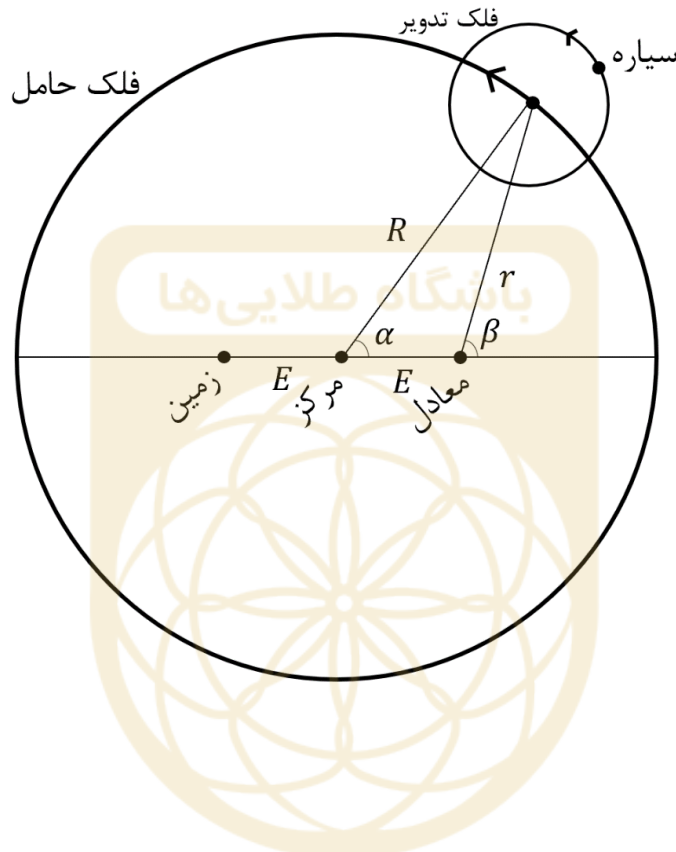
$$5\text{عكس} = 4\beta - 2\pi$$

$$0 = \sin\frac{\theta_{VA}}{2} \tan\frac{x}{2} + \cos\beta \rightarrow \beta = 97.52^\circ$$

$$5\text{عكس} = 0.525 \text{ str}$$

سؤال دهم : (140 نمره)

یکی از اولین مدل‌های پیشنهاد شده در کتاب بطلمیوس برای توضیح حرکت سیارات در نظریه زمین مرکزی فلک تدویر است. در این مدل سیاره بر روی یک فلک تدویر حرکت می‌کند که مرکز این فلک مطابق شکل زیر روی محیط فلک حامل به مرکزیت زمین قرار دارد. این مدل تا مدت‌ها مورد استفاده قرار گرفت، اما در مواردی با شواهد رصدی متناقض بود و یا پیش‌بینی‌های آن برای پدیده‌های نجومی اشتباه بودند. در طی زمان اصلاحاتی در این مدل صورت گرفت. در اولین قدم مرکز دایره فلک حامل را نقطه‌ای غیر از زمین قرار دادند. این مدل نیز تا مدت‌ها مورد قبول بود تا آنکه با دقت‌تر شدن مشاهدات، این مدل نیز در توضیح بعضی مسائل، مثل تغییر سرعت زاویه‌ای سیاره در فواصل مختلف از زمین، ناتوان ماند.



در مرحله بعدی از اصلاح، نقطه معادلی پیشنهاد شد که نسبت به مرکز دایره فلک حامل در نقطه مقابل زمین و در همان فاصله از مرکز قرار دارد (نقطه معادل در شکل). مرکز فلک تدویر نسبت به نقطه مرکز همواره فاصله ثابت (R) دارد، اما سرعت زاویه‌ای حرکت آن $(\Omega = \frac{d\beta}{dt})$ نسبت به نقطه معادل ثابت است.

الف) با نوشتن روابط هندسی بین پارامترهای شکل، روابط زیر را اثبات کنید. (35 نمره)

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha) - \frac{E}{R}}$$

$$E \sin(\beta) = R \sin(\beta - \alpha)$$

ب) از آنجاییکه سرعت زاویه‌ای حول نقطه معادل ثابت است $(\Omega = \text{ثابت})$ ، سرعت زاویه‌ای حول مرکز با زمان تغییر می‌کند و این تغییر سرعت زاویه‌ای مشاهده شده توسط ناظران زمینی را توجیه می‌کند. با مشتق‌گیری از روابط هندسی و نتایج قسمت الف رابطه زیر را اثبات کنید. (35 نمره)

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{r}}{E \sin(\beta)}$$

ج) بار دیگر از روابط هندسی قسمت الف استفاده کرده و رابطه‌ای برای \dot{r} بر حسب r, E, Ω, β به دست آورید. با جای گذاری این رابطه در رابطه قسمت ب و حذف \dot{r} ، رابطه زیر را اثبات کنید. (45 نمره)

$$\omega(t) = \left[1 - \frac{\frac{E}{R} \cos(\Omega t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{R} \sin(\Omega t)\right)^2}} \right] \Omega$$

د) با داشتن $\frac{E}{R} = 0.2$ ، نسبت $\frac{\omega}{\Omega}$ را بر حسب Ωt رسم کنید (نمودار را برای پنج نقطه با فاصله یکسان در بازه صفر تا 2π رسم کنید. 25 نمره)

پاسخ:

(الف)

$$R \sin \alpha = r \sin \beta \quad (I) , \quad R \cos \alpha = r \cos \beta \quad (II) \rightarrow \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{E}{R}}$$

$$E = R \cos \alpha - r \cos \beta = R \cos \alpha - \frac{R \sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta \rightarrow E \sin \beta = R[\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \alpha]$$

$$= R \sin(\beta - \alpha)$$

(ب)

$$\Omega = \frac{d\beta}{dt} = K , \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$$

به ترتیب از روابط (I) و (II) مشتق می‌گیریم:

$$R \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} = \dot{r} \sin \beta + r \cos \beta \cdot \dot{\beta}, \quad -R \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = \dot{r} \cos \beta + r \sin \beta \cdot \dot{\beta}$$

$$\rightarrow \dot{\beta} = \frac{R \cos \alpha \cdot \omega - \dot{r} \sin \beta}{r \cos \beta} = \frac{R \sin \alpha \cdot \omega + \dot{r} \cos \beta}{r \sin \beta}$$

$$\rightarrow R \sin \beta \cos \alpha \cdot \omega - \dot{r} \sin^2 \beta = \dot{r} \cos^2 \beta + R \omega \sin \alpha \cos \beta$$

$$\rightarrow \dot{r} = R \omega (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) = E \sin \beta \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{\dot{r}}{E \sin \beta}$$

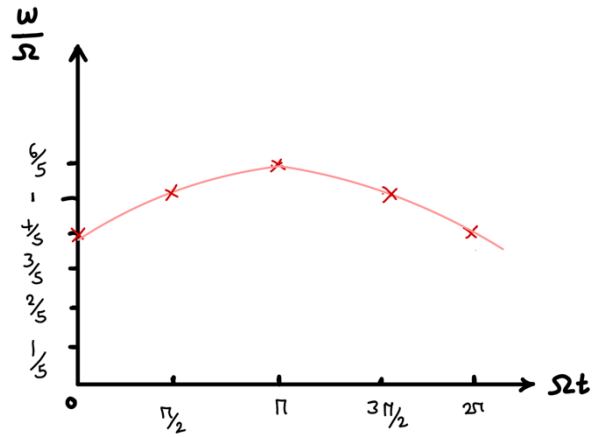
(ج)

$$R \cos \alpha = r \cos \beta + E \rightarrow R^2 \cos^2 \alpha = r^2 \cos^2 \beta + E^2 + 2rE \cos \beta , \quad R^2 \sin^2 \alpha = r^2 \sin^2 \beta$$

$$\rightarrow R^2 = r^2 + E^2 + 2rE \cos \beta \quad (III)$$

از رابطه (III) مشتق می‌گیریم:

$$0 = 2r\dot{r} + 2E\dot{r} \cos \beta - 2Er \sin \beta \cdot \Omega \rightarrow \dot{r} = \frac{rE \sin \beta \cdot \Omega}{r + E \cos \beta}$$



$$\rightarrow \omega = \frac{rE \sin \beta \cdot \Omega / r + E \cos \beta}{E \sin \beta} = \frac{r\Omega}{r + E \cos \beta} = \frac{-E \cos \beta + \sqrt{R^2 - E^2 \sin^2 \beta}}{\sqrt{R^2 - E^2 \sin^2 \beta}} \cdot \Omega$$

$$= \left[1 - \frac{\frac{E}{R} \cos \beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{R} \sin \beta\right)^2}} \right] \cdot \Omega$$

همچنین از رابطه (III) داریم:

$$r = -E \cos \beta + \sqrt{E^2 \cos^2 \beta - (E^2 - R^2)} = -E \cos \beta + \sqrt{R^2 - E^2 \sin^2 \beta}$$

(د)

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 - \frac{0.2 \cos(\Omega t)}{\sqrt{1 - (0.2 \cos(\Omega t))^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} & 1 \\ \pi & \frac{6}{5} \\ \frac{3\pi}{2} & 1 \\ 2\pi & \frac{4}{5} \end{array} \right.$$