به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸ — **روز اول** — زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه دو است که قدرمطلق مقدار آن در سه نقطه‌ی ۱−، ۰ و ۱ کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-۱,۱]$،

$$|p(x)| \leq \frac{۵}{۴}.$$

۲) یک باغ مربعی‌شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰×۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار و یک درخت سیب وجود دارد. به‌علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطعه را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.)
نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰ تا بیش‌تر نیست.

۳) فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $P\widehat{A}Q \geq \widehat{A}$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۴ اردیبهشت ۱۳۸۸ | **روز دوم** | زمان: چهار ساعت و نیم

۴) $n(n+۲)$ سرباز تازه‌کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم بر می‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+۲$ ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۵) اعداد طبیعی $a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و j متمایز، a_i بر $a_j - a_i$ بخش‌پذیر است. نشان دهید برای هر $i < j$،

$$ia_j \leq ja_i.$$

۶) ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده‌است؛ ممکن است برخی کارتی نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-۱$، i و $i+۱$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲ کارت شماره‌ی ۱ است!)
فرض کنید در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.