به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۹ اردیبهشت ۱۳۸۹ | روز اول | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - 1$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + 1$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab + 1)^2 + (a - b)^2$ مربع کامل نیست.

۲) n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{2}{3}(n^2 - n)$ بیش‌تر نیست.

۳) دایره‌های W_1 و W_2 در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی W_1 و W_2 هستند به طوریکه AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی W_2 را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$D\widehat{P}M = B\widehat{D}C$$

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۸۹ | **روز دوم** | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عددهایی حقیقی‌اند و

$$\min\{d, b+d\} > \max\{|c|, |a+c|\}$$

ثابت کنید که معادله‌ی $P(x) = 0$ در بازه‌ی $[-1,1]$ جواب ندارد.

۵) در مثلث ABC، $\widehat{A} = 60^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶) مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاسِ مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-1)^2$ بیشتر نیست.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.