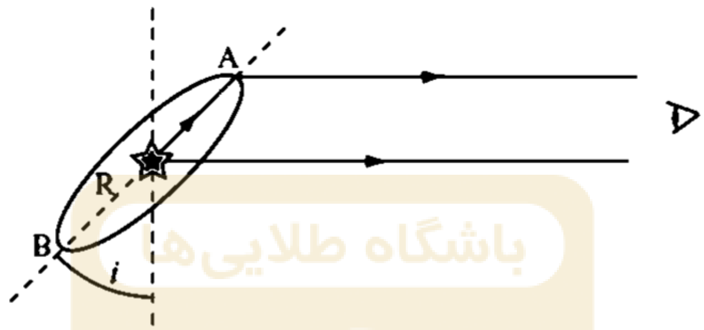
ثوابت فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}$
c	سرعت نور	$۳\times۱۰^{۸}ms^{-۱}$
pc	پارسک	$۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}m$
Au	واحد نجومی	$۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}m$
Ly	سال نوری	$۹/۴۶\times۱۰^{۱۵}m$
$R_\odot$	شعاع خورشید	$۶/۹۶\times۱۰^{۸}m$
$R_\oplus$	شعاع زمین	$۶/۳۸\times۱۰^{۶}m$
	شعاع ماه	$۱/۷۴\times۱۰^{۶}m$
	شعاع مداری ماه	$۳/۸۴\times۱۰^{۸}m$
$M_\oplus$	جرم زمین	$۵/۹۷\times۱۰^{۲۴}kg$
$T_\odot$	دمای خورشید	$۵۷۷۷\,K$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	$۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}W$
	ثابت خورشیدی	$۱/۳۷\times۱۰^{۳}Wm^{-۲}$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید	$-۲۶/۸$
$H_\circ$	ثابت هابل	$۷۰\,Km\,s^{-۱}Mpc^{-۱}$

۱) در فوریه ۱۹۸۷ در کهکشان ابر ماژلانی بزرگ یک ابرنواختر در حال انفجار دیده شد. مدت کوتاهی بعد از آن، خطوط نشری نازکی از کربن و نیتروژن بسیار یونیده در طیف آن ظاهر شد. خطوط نشری خیلی نازک بودند و احتمالاً از گاز سرد موجود در اطراف ستاره ارسال شده بودند. هنگامی که ابرنواختر خاموش شد، یک بیضی از گاز فروزان در اطراف آن مشاهده شد که ابعاد آن در آسمان در حدود ″۱/۶۲ × ″۱/۱۰ بود. این ابعاد احتمالاً معرف یک حلقه‌ی دایره‌ای شکل از ماده است که در صفحه‌ی استوایی ستاره و در مرحله‌ای که ستاره غول قرمز بوده است از آن به بیرون پرتاب شده است و به ظاهر بیضی دیده می‌شود (شکل۱).



الف) زاویه‌ی تمایل حلقه‌ی ابرنواختر (i) را بدست آورید.

روشن شدن خطوط نشری نازک چندین روز بعد از انفجار ابرنواختر شروع می‌شود. در واقع نور از دو راه به ما می‌رسد: یکی نوری است که مستقیماً از انفجار به ما می‌رسد، و دومی نوری است که از محل انفجار به حلقه‌ی گازی در اطراف ابرنواختر رسیده، گاز را یونیده کرده و سپس نور از گاز به سمت ما گسیل شده است.

ب) اگر شعاع حلقه R باشد، مقدار تأخیر زمانی که نور ابتدا به نقطه‌ی A و سپس به ما می‌رسد، با نوری که مستقیماً از ابرنواختر به سمت ما می‌رسد (t_A) را بدست آورید.

ج) همانند قسمت (ب) تأخیر زمانیِ مربوط به نوری که از طریق نقطه‌ی B به ما می‌رسد (t_B) را بدست آورید.

د) اگر مقادیر اندازه‌گیری شده از تأخیر زمانی، بر حسب روز، عبارت باشند از:

$t_A = ۸۳ \pm ۶$ و $t_B = ۳۹۵ \pm ۲۴$، شعاع R و فاصله‌ی ما از ابرنواختر، d، را برحسب روز نوری به دست آورید و خطایِ مقادیر مربوطه را نیز ذکر کنید.

هـ) اگر ابرنواختر در بیشترین روشنایی خود دارای قدر ظاهری $m_v = ۴$ باشد، درخشندگی مطلق آن L را بر حسب درخشندگی مطلق خورشید، $L_\odot$، به دست آورید و با توجه به قسمت (د) خطای آن را نیز ذکر کنید.

۲) مشـــاهـدات رصدی وجود یک سیـاه‌چاله در برخی از کهکشان‌ها را پیش‌بینی می‌کند. برای مدل‌سازی منحنی سرعت دورانی کهکشان‌هایی که یک سیاه‌چاله در مرکزشان قرار دارد، فرض می‌کنیم که یک جرم نقطه‌ای (سیاه‌چاله) با جرم $M_\circ = ۱۰^۶ M_\odot$ در مرکز کهکشان قرار دارد و بقیه‌ی جرم با چگالی $\rho(r) = \rho_\circ a^۲ / r^۲$ در اطراف آن توزیع شده است، که در این رابطه $a = ۱kpc$ و $\rho_\circ$ مقادیر ثابتی هستند.

الف) رابطه‌ای برای سرعت دورانی اجرام، حول مرکز کهکشان، $V(r)$، به دست آورده و نمودار آن را به صورت تقریبی رسم کنید. فرض کنید اجرام در مدارهای دایره‌ای حرکت می‌کنند.

ب) اگر در شعاع $r = 1pc$ سرعت دورانیِ ستاره‌ای برابر با $V = 100 Km.s^{-1}$ باشد، مقدار عددی ثابت ρ_0 را بر حسب جرم خورشید بر پارسک مکعب $(M_{\odot} / pc^3)$ به دست آورید.

ج) اگر چگالی $\rho(r)$ تا فاصله‌ای گسترده شده باشد که مقدارش در آنجا $0/001\rho_0$ باشد (به عبارت دیگر لبه‌ی کهکشان جایی است که چگالی در آنجا $0/001\rho_0$ باشد)، مقدار عددی سرعت فرار از لبه‌ی کهکشان را حساب کنید.

۳) در نجوم قدر ستاره‌ها در نواحی مختلف طیفی اندازه‌گیری می‌شود. معمولاً ناحیه‌ی مرئی را به سه ناحیه‌ی U به مرکز ۳۶۵ نانومتر و پهنای ۶۸ نانومتر و B به مرکز ٤٤٠ نانومتر و پهنای ۹۸ نانومتر و V به مرکز ۵۵۰ نانومتر و پهنای ۸۹ نانومتر تقسیم‌بندی می‌کنند. به این روش اصطلاحاً طیف‌سنجی UBV گفته می‌شود. کمیت‌های $U-B$، $U-V$ و $B-V$ کمیت‌های بسیار مناسبی در نجوم رصدی هستند. (راهنمایی: $U - B = m_U - m_B$)

چون تضعیف نور ستاره‌ها در محیط‌های مادی تابع طول‌موج نور عبوری است؛ بنابراین ضریب تضعیف نور ستاره نیز برای اندیس‌های B،U و V متفاوت خواهد بود.

مقدار شار تابشی ستاره پس از عبور از ناحیه‌ی کدر به ضخامت d به صورت $f = f_0 \exp(-k_\lambda d)$ کاهش می‌یابد که k_λ ضریب تضعیف در طول‌موج λ است و f_0 شار تابشی در بالای جو.

الف) رابطه‌ای برای «قدر ستاره» و در حضور تضعیف به دست آورید.

- اندیس رنگی $U-B$ ستاره‌ای در دو زاویه‌ی صفر و ۶۰ درجه نسبت به سمت‌الرأس به ترتیب ۰/۸ و ۰/۶ است. همچنین $B-V$ این ستاره در زاویه‌ی سمت الرأسی صفر و ۶۰ درجه به ترتیب دو مقدار ۰/۶− و ۰/۷− است.

- مقدار افزایش قدر به دلیل خاموشی جوی در نواحی $U-B$ و $B-V$ را به ترتیب با k_{U-B} و k_{B-V} نشان می‌دهیم.

ب) ضریب خاموشی جو k_{U-B} و k_{B-V} را و همچنین مقدار اندیس رنگ‌های خارج از جوی $(U-B)_0$ و $(B-V)_0$ بدون اثر خاموشی را به دست آورید.

ج) قدر ستاره در ناحیه‌ی U برابر ٦ است. قدر B و V ستاره را بدست آورید.

د) قدر بولومتریک ستاره قدری است که ستاره در تمام طول‌موج طیف دارد. در این‌جا ما تقریباً قدر بولومتریک را از روی مجموع شار دریافتی از سه ناحیه‌ی B،U و V محاسبه می‌کنیم. با این تعریف قدر بولومتریک این ستاره در بالای جو را محاسبه کنید.

٤) فرض کنید در ابتدای بهار، سیاره‌ی مریخ در حالتِ مقارنه باشد. شش ماه بعد (ابتدای پاییز) در لحظه‌ی طلوع خورشید، سمت و ارتفاعِ مریخ از دید ناظری در شهر دوگنبدان با عرض جغرافیایی ۳۰/۵ درجه، چقدر خواهد بود؟ (مدار مریخ را بر روی دایره‌البروج و نیم محور مدار مریخ را ۱/۵۲ واحد نجومی در نظر بگیرید).

۵) مقارنه دو جرم سماوی زمانی است که دو جرم در آسمان کم‌ترین زاویه را از دید ناظر زمین داشته باشند. در لحظه‌ی مقارنه‌ی دو جرم در منظومه‌ی خورشیدی مرکز هر دو جرم روی یک نصف‌النهار قرار گرفته‌اند و فاصله‌ی زاویه‌ای این دو مرکز $4/5^\circ$ است.

دوره تناوب نجومی این اجرام در جدول مقابل آمده است.

زمین	M_2	M_1	
۳٦۵/۲۵	۲۷/۳	۲۲٤/۷	T نجومی

۲٤ساعت بعد، فاصله‌ی زاویه‌ای مرکزهای این دو جرم آسمانی چند درجه خواهد بود؟

۶) برخی از ستاره‌ها در طی مراحل مختلف زندگی‌شان، پس از خروج بخشی از جرمشان که از طریق سوخت و ساز هسته‌ای است، تحت گرانش می‌رُمبند و تبدیل به کوتوله‌ی سفید می‌شوند. به طور معمول جرم کوتوله‌های سفید از مرتبه‌ی جرم خورشید و شعاعشان از مرتبه‌ی شعاع زمین است. جرم و شعاع سه کوتوله‌ی سفید که هر کدام عضوی از یک منظومه‌ی دوتایی هستند اندازه‌گیری شده و در جدول زیر مقادیر آن‌ها ذکر شده است.

شعاع $(R_\odot)$	جرم $(M_\odot)$	ستاره
۰/۰۱۸	۰/۵	۱
۰/۰۱۵	۰/۸	۲
۰/۰۱۴	۱/۱	۳

الف) اگر فرض کنیم که رابطه‌ی جرم و شعاع در کوتوله‌های سفید به صورت زیر باشد:

$$\frac{R}{R_\odot} = A(\frac{M}{M_\odot})^B$$

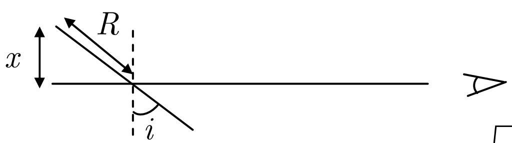
با رسم منحنی شعاع – جرم در مقیاس لگاریتمی، در نمودار شماره‌ی ۱، مقادیر عددی A و B را به دست آورید.

ب) فرض کنید که کوتوله‌ی سفید مانند جسم سیاه تابش می‌کند، درخشندگی مطلق یک کوتوله‌ی سفید را بر حسب جرم (M) و دمای سطحی (T_E) آن به دست آورید.

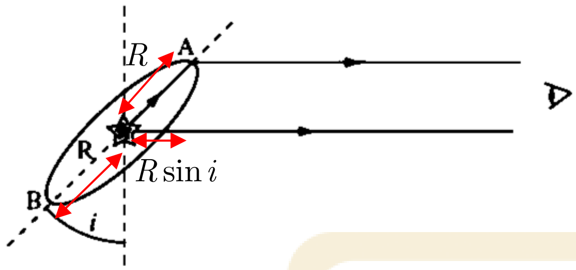
ج) نمودار درخشندگی-دمای سطحی یک کوتوله با جرم $M = ۱M_\odot$ را در مقیاس لگاریتمی در نمودار شماره ۲ رسم کنید.

د) با توجه به قسمت (ج)، اگر درخشندگی کوتوله‌ای به جرم $M = ۱M_\odot$ و دمای سطحی $T_E = ۱۰^۴ K$ در طول زمان ثابت باشد، چه مدت این کوتوله می‌درخشد. یک کوتوله‌ی سفید متشکل از یون‌ها و الکترون‌ها است که فقط انرژی جنبشی یون‌ها می‌توان ساطع شود. مقدار انرژی یون‌ها تقریباً ۰/۱ کل انرژی پتانسیل کوتوله است. چگالی جرمی کوتوله را ثابت فرض کنید.

۱) ابتدا باید طول قطر کوچک‌تر بیضیِ مورد نظر را حساب کنیم، که مطابق شکل برابر می‌شود با $x = R\cos i$. حال برای محاسبه‌ی خروج از مرکز از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم: $e = \sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲} = \sqrt{۱-(\frac{R\cos i}{R})^۲} = \sin i \Rightarrow i = ۴۷^\circ$ که خواسته‌ی قسمت الف مسئله است.



ب) تنها پارامتر موثر در تأخیر زمانی نور رسیده، اختلاف طول مسیر طی شده است، پس:



$$c = \frac{x}{t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad , \quad \Delta x = R - R\sin i$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = \frac{R(۱-\sin i)}{c}$$

ج) مشابه قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$c = \frac{x}{t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad , \quad \Delta x = R + R\sin i \quad \Rightarrow \quad \Delta t_B = \frac{R(۱+\sin i)}{c}$$

د) میانگین مدت زمانِ رسیدن دو باریکه‌ی نور در قسمت‌های (ب) و (ج) برابر است با مدت زمان رسیدن نور باریکه‌ی گسیل شده از مرکز ابرنواختر، پس داریم:

$$t_{average} = \frac{\Delta t_A + \Delta t_B}{۲} = \frac{(R - R\sin i) + (R + R\sin i)}{۲c} = \frac{۲R}{۲c} = \frac{۸۳ \pm ۶ + ۳۹۵ \pm ۲۴}{۲} = \frac{۴۷۸ \pm ۳۰}{۲}$$

$$\Rightarrow R = c \times \frac{(۴۷۸ \pm ۳۰) \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰}{۲} = ۶/۰ \times ۱۰^{۱۵} \pm ۳/۸ \times ۱۰^{۱۴}\, m = ۲۳۱ \pm ۱۴/۶\, Ld$$

از طرفی با توجه به داده‌های صورت سوال، ابعاد ظاهری ابرنواختر برابر است با: $۱/۶۲'' \times ۱/۱۰''$ که در آن قطر بزرگ‌تر همان R ابرنواختر است. پس از تبدیل بزرگی ظاهری به درجه و سپس به رادیان ($\frac{۱/۶۲''}{۳۶۰۰} = ۴/۵^\circ \times ۱۰^{-۴} = ۷/۸ \times ۱۰^{-۶}\, Rad$)، برای بزرگی ظاهری چنین می‌نویسیم:

$$\theta = \frac{۲R}{d} \Rightarrow d = \frac{۲ \times (۶/۰ \times ۱۰^{۱۵} \pm ۳/۸ \times ۱۰^{۱۴})}{۷/۸ \times ۱۰^{-۶}} = ۱/۵۸ \times ۱۰^{۲۱} \pm ۹/۷ \times ۱۰^{۱۹}\, m = ۶/۱ \times ۱۰^{۷} \pm ۳/۷۴ \times ۱۰^{۷}\, Ld$$

هـ) ابتدا مقدار روشنایی ابرنواختر را، به روش مقایسه‌ای با خورشید اندازه‌گیری می‌کنیم:

$$m_v - m_\odot = -۲/۵ \log \frac{b_v}{b_\odot} \Rightarrow ۴ + ۲۶/۷ = -۲/۵ \log \frac{b_v}{۱۳۷۰} \Rightarrow b_v = ۷/۲ \times ۱۰^{-۱۰}$$

$$b_v = \frac{L_v}{۴\pi d_v^۲} \Rightarrow L_v = (۷/۲ \times ۱۰^{-۱۰}) \times ۴\pi(۱/۵۸ \times ۱۰^{۲۱} \pm ۹/۷ \times ۱۰^{۱۹})^۲ \Rightarrow$$

$$L_v = (۷/۲ \times ۱۰^{-۱۰}) \times ۴\pi(۱/۵۸ \times ۱۰^{۲۱} \pm ۹/۷ \times ۱۰^{۱۹})^۲$$

$$= (۷/۲ \times ۱۰^{-۱۰}) \times ۴\pi \times (۲/۵ \times ۱۰^{۴۲} \pm ۲ \times ۱/۵ \times ۱۰^{۴۱} + \cancel{۹/۴ \times ۱۰^{۳۹}}) \Rightarrow$$

$$L_v = ۲/۲ \times ۱۰^{۳۴} \pm ۲/۷ \times ۱۰^{۳۳}\, W$$

۲) الف) با فرض مدارهای دایـروی و از برابر نهیِ نیـروها داریم: $\frac{GmM}{r^۲} = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. حال کافیست جرم داخلی را برحسب پارامترهای داده شده و با فرض احاطه‌ی ماده‌ی داخلی در فضایی گوی‌وار، محاسبه کنیم:

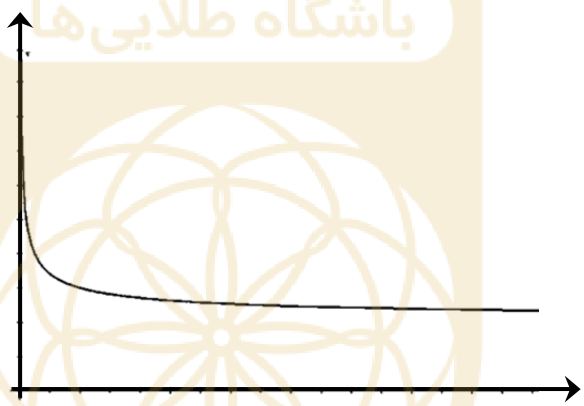
$$M(r) = M_\circ + \int_\circ^r ۴\pi r^۲ \rho(r)\, dr \ , \ \rho(r) = \rho_\circ \frac{a^۲}{r^۲} \Rightarrow M(r) = M_\circ + \int_\circ^r ۴\pi r^۲ \rho_\circ \frac{a^۲}{r^۲} dr$$

$$= M_\circ + \int_\circ^r ۴\pi a^۲ \rho_\circ dr = M_\circ + ۴\pi a^۲ \rho_\circ r$$

در نتیجه داریم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_\circ + ۴\pi a^۲ \rho_\circ r)}{r}}$$

برای ترسیم نـمـودار، پس از نقطه‌گـــذاری و بدست‌آوردن رفتار منحنــی در نــزدیــکی مجانب‌هایش، به شکل روبرو می‌رسیم.



ب) مقادیر عددی را پس از تبدیل واحد جایگذاری می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_\circ + ۴\pi a^۲ \rho_\circ r)}{r}} \quad , \ v = ۱۰۰ km.s^{-۱}, r = ۱pc \ , \ a = ۱kpc, \ M_\circ = ۱۰^۶ M_\odot$$

در نتیجه: $\rho_\circ = ۷/۰۹ \times ۱۰^{-۲۱} \ (kg/m^۳)$ می‌شود.

ج) ابتدا باید ببینیم در چه فاصله‌ای چگـالی به اندازه‌ی $۰/۰۱\rho_\circ$ کاهش می‌یابد؛ با توجه به معادله‌ی تغییرات چگالی و برابرنهی با این مقدار داریم:

$$\rho(r) = \rho_\circ \frac{a^۲}{r^۲} \Rightarrow ۰/۰۱\rho_\circ = \rho_\circ \frac{۱kpc^۲}{r^۲} \Rightarrow r = ۱۰kpc$$

حال باید سرعت فرار را در این شعاع محاسبه کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{G(M_\circ + ۴\pi a^۲ \rho_\circ r)}{r}}, \qquad r = ۱۰kpc \ , \ a = ۱kpc, \ M_\circ = ۱۰^۶ M_\odot \ , \ \rho_\circ = ۷/۰۹ \times ۱۰^{-۲۱} \ (kg/m^۳)$$

پس داریم: $v = ۱۰۶/۶۷\, km.s^{-۱}$

۳) الف) مقایسه‌ی قدر ظاهری ستاره در حضور عامل کاهنده، با قدر ظاهری ستاره در شرایط خلأ چنین است:

$$m - m_{\circ} = -۲/۵\log\frac{b}{b_{\circ}},\ \ d = d_{\circ} \quad \Rightarrow \quad m - m_{\circ} = -۲/۵\log\frac{L}{L_{\circ}} = -۲/۵\log\frac{f}{f_{\circ}} \quad , \quad \frac{f}{f_{\circ}} = e^{-k_{\lambda} d}$$

$$\Rightarrow m - m_{\circ} = -۲/۵\log e^{-k_{\lambda} d} = k_{\lambda} d\,(۲/۵\log e) \Rightarrow$$

$$m = m_{\circ} + ۱/۰۸ k_{\lambda} d$$

ب) با توجه به عبارت بدست آمده در قسمت الف می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$U - U_{\circ} = ۱/۰۸ k_U d \quad , \quad B - B_{\circ} = ۱/۰۸ k_B d \quad , \quad V - V_{\circ} = ۱/۰۸ k_V d$$

حال می‌توانیم مقدار اندیس رنگی را در حضور و بدون حضور جو مقایسه کنیم (با تفریق دو به دوی روابط از هم) مثلاً:

$$(B - V) - (B - V)_{\circ} = ۱/۰۸ d\,(k_B - k_V)$$

از طرف دیگر، مسافت طی شده توسط نور در درون جو نیز از رابطه‌ی $d_z = d\sec Z$ بدست می‌آید؛ لذا داریم:

$$(B - V) - (B - V)_{\circ} = ۱/۰۸ d\sec Z\,(k_B - k_V)$$

حال کافیست این رابطه را برای دو زاویه‌ی سرسویی متفاوتی که در متن سوال آمده، مقایسه کنیم:

$$(B - V)_{Z=۶۰} - (B - V)_{\circ} = ۱/۰۸ d\sec ۶۰ (k_B - k_V) \quad , \quad (B - V)_{Z=۰} - (B - V)_{\circ} = ۱/۰۸ d\sec ۰ (k_B - k_V)$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{(B - V)_{Z=۶۰} - (B - V)_{\circ}}{(B - V)_{Z=۰} - (B - V)_{\circ}} = \frac{\sec ۶۰}{\sec ۰} = ۲ \, ,$$

و طبق صورت سوال: $(B - V)_{Z=۶۰} = -۰/۷$ و $(B - V)_{Z=۰} = -۰/۶$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(B - V)_{\circ} = -۰/۵$$

بار دیگر همین عملیات را برای شاخص رنگیِ $U - B$ تکرار می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{(U - B)_{Z=۶۰} - (U - B)_{\circ}}{(U - B)_{Z=۰} - (U - B)_{\circ}} = \frac{\sec ۶۰}{\sec ۰} = ۲$$

و طبق صورت سوال: $(U - B)_{Z=۶۰} = ۰/۶$ و $(U - B)_{Z=۰} = ۰/۸$. با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(U - B)_{\circ} = ۱$$

ج) قدر ستاره در طیف $U_{\circ} = ۶$ است؛ با توجه به $(B - V)_{\circ} = -۰/۵$ و $(U - B)_{\circ} = ۱$، داریم:

$$B = ۵ \, , \, V = ۵/۵$$

د) طبق صورت سوال قدر مطلق در طیف آبی چنین بدست می‌آید:

$$(B - V)_{\circ} = M_B - M_V \ , \ \ M_V = +۴ \ , (B - V)_{\circ} = -۰/۵ \quad \Rightarrow M_B = ۳/۵$$

از طرف دیگر، قدر بولومتریک حاصل برآیند تمامی نورها در تمامی طیف‌هاست یعنی برای سادگی کار و با توجه به تعریف سوال می‌توانیم در اینجا چنین بنویسیم: $L_{bol} = L_U + L_B + L_V$. بنابراین مطابق معمول برای مقایسه چنین می‌نویسیم:

$$M_{bol} - M_B = -۲/۵\log\frac{L_{bol}}{L_B} = -۲/۵\log\frac{L_B + L_U + L_V}{L_B} = -۲/۵\log(۱ + \frac{L_U}{L_B} + \frac{L_V}{L_B})$$

حال باید نسبت‌های $\frac{L_U}{L_B}, \frac{L_V}{L_B}$ را بدست آوریم:

$$U - B = M_U - M_B = -۲/۵\log\frac{L_U}{L_B} \ , \ V - B = M_V - M_B = -۲/۵\log\frac{L_V}{L_B}$$

پس از جایگذاری مقادیر عددی داریم: $\frac{L_U}{L_B} = ۰/۳۹۸ \ , \ \frac{L_V}{L_B} = ۰/۶۳۱$

و در نهایت با جایگذاری در عبارت اولیه داریم:

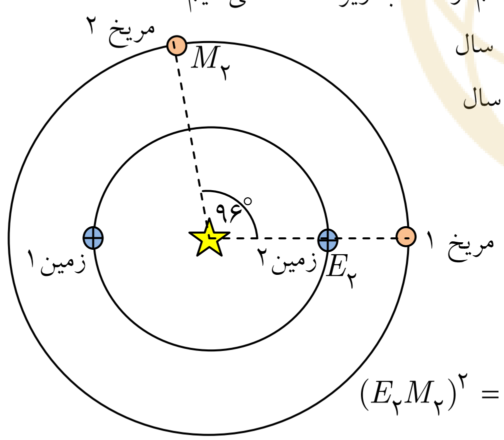
$$M_{bol} = ۳/۵ - ۲/۵\log(۱ + ۰/۳۹۸ + ۰/۶۳۱) = ۲/۷۳$$

در انتها برای بدست آوردن درخشندگی بولومتریک این ستاره، باید قدر بولومتریک ستاره را با درخشندگی بولومتریک خورشید مقایسه کنیم:

$$m_{bol} - m_{bol\odot} = -۲/۵\log\frac{L_{bol}}{L_{bol\odot}} \ \Rightarrow \ L_{bol} = ۶/۲۵L_{bol\odot}$$

۴) در حالت مقارنه، مریخ دقیقاً در پشت خورشید قرار می‌گیرد. طبق قوانین کپلر $P^۲ = a^۳$ و با توجه به این‌که نیم‌محور بزرگ مدار مریخ $۱/۵۲Au$ است؛ دوره تناوب مداری مریخ را برابر $۱/۸۷$ سال زمینی بدست می‌آوریم. بعد از گذشت شش ماه، زمین ۱۸۰ درجه از موقعیت اولیه‌اش جا بجا می‌شود؛ برای محاسبه‌ی موقعیت جدید مریخ هم از تناسب زیر استفاده می‌کنیم:

۳۶۰ درجه	۱/۸۷ سال
x درجه	۰/۵ سال



در نتیجه $x = ۹۶/۲۵^\circ$. پس وضعیت قرارگیری دو سیاره نسبت به هم به قرار مقابل خواهد بود:

حال برای بدست آوردن جدایی زاویه‌ای زمین۲ و مریخ۲ در مثلث (زمین۲– مریخ۲ – خورشید) از قضیه‌ی کسینوس‌ها و سپس سینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}(E_۲M_۲)^۲ = (E_۲\odot)^۲ + (M_۲\odot)^۲ - ۲(E_۲\odot)(M_۲\odot)\cos\theta \\ M_۲\odot = ۱/۵۲Au \ , \ E_۲\odot = ۱Au, \ \theta = ۹۶^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow E_۲M_۲ = ۱/۹Au$$

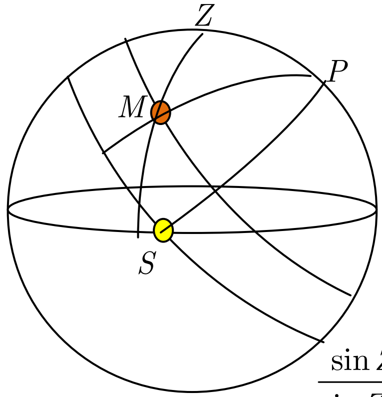
حال با نوشتن قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث مسطحه داریم:

$$\frac{E_۲M_۲}{\sin ۹۶} = \frac{M_۲\odot}{\sin x} \Rightarrow x = ۵۲^\circ$$

از دید ناظرِ روی زمین۲، خورشید در نقطه‌ی اول میزان قرار دارد، پس طول دایره‌البروجی مریخ $۱۸۰ - ۵۲ = ۱۲۸^\circ$ درجه است (یعنی ۱۲۸ درجه با نقطه‌ی اول حمل فاصله دارد). حال با استفاده از روابط تبدیلی بین دستگاه‌های مختصات، داریم:

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\lambda \ , \ \cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda \ \Rightarrow \ \delta = ۱۸/۴^\circ \ , \ \alpha = ۱۳۰^\circ$$

بُعد خورشید در این تاریخ، ۱۸۰ درجه است، از طرف دیگر زاویه‌ی بین نصف‌النهار مریخ و خورشید برابر تفاوت بُعد این دو جرم سماوی است، یعنی: $\alpha_{\odot} - \alpha_{M_۲} = ۱۸۰ - ۱۳۰ = ۵۰^\circ$. که در شکل زیر با زاویه‌ی MPS مشخص شده است:



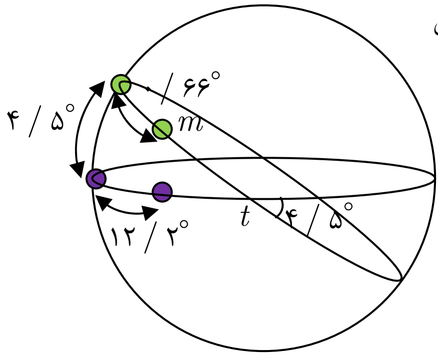
حال در کره‌ی آسمان در مثلث ZPM قضیه‌ی کسینوس‌ها را چنین می‌نویسیم:

$$\cos ZM = \cos ZP \cos ZM + \sin ZP \sin ZM \cos ZPM$$

کـه در آن $ZPM = ۹۰ - MPS = ۴۰^\circ$ و $PM = ۹۰ - \delta = ۷۲^\circ$ و $ZP = ۹۰ - \varphi = ۵۹/۵^\circ$. با جـایگذاری این مقادیر در رابطه‌ی اولیه، مقدار $ZM = ۳۸^\circ$ بدست می‌آید. پس ارتفاع مـریخ برابر متــمم این مقدار یعنی ۵۲° است. برای بدســـــت آوردن سمت نیز از قضیه‌ی سینوس‌ها کمک می‌گیریم: $\frac{\sin ZM}{\sin ZPM} = \frac{\sin PM}{\sin PZM} \Rightarrow \frac{\sin ۳۸}{\sin ۴۰} = \frac{\sin ۷۲^\circ}{\sin A}$

که پس از حل، مقادیر سمت را ۸۳ یا ۹۷ درجه بدست می‌دهد. از این میان تنها پاسخ ۹۷ درجه قابل قبول است. (زیرا با توجه به شکل سمت مریخ شرقی‌تر از سمت خورشید است)

۵) هر دو جسم روی یک نصف‌النهار قرار دارند. پس، از لحظه‌ی مقارنه دائماً جدایی زاویه‌ای‌شان کاهش می‌یابد؛ بنابراین جدایی زاویه‌ای این دو در لحظه‌ی مقارنه برابر زاویه‌ی انحراف مداری دو سیاره نسبت به یکدیگر است.



حال با فرض مدارهای دایروی، میزان جابه‌جایی دو سیاره را ظرف مدت یک شبانـه روز و بر روی صفحه‌های مداریشان حساب می‌کنیم؛ اما از آنجا که زمین هم به طور هم‌زمان در مدارش جابجـا می‌شود، نخست دوره تناوب هلالی دو سیاره را حساب می‌کنیم:

$\frac{۱}{P} = \frac{۱}{T_{\oplus}} - \frac{۱}{T_S}$ پس از جایگذاری دوره تناوب مداری دو سیاره، دوره تناوب‌های هلالــی سیاره‌ها برابر ۲۹/۵ و ۵۳۸/۹۳ روز بدست خواهد آمد. حال با استفاده از تناسب میزان جابجایـی سیاره‌ها را ظرف مدت ۲۴ ساعت (۱روز) محاسبه می‌کنیم:

۲۹/۵ روز	۳۶۰ درجه
۱ روز	x درجه

که از اینجا مقدار x برابر ۱۲/۲ درجه بدست می‌آید. با تکرار تناسب مشابه، میزان جابه‌جایی سیاره‌ی دوم در طی یک روز را نیز محاسبه می‌کنیم که برابر ۰/٦٦ درجه بدست می‌آید. حال با جایگذاری مقادیر روی شکل، به سادگی و با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توان جدایی‌زاویه‌ای دو سیاره را محاسبه کرد: $\cos ms = \cos mt \cos st + \sin mt \sin st \cos mst$ و $mt = ۹۰ - ۰/۶۶ = ۸۹/۳۴^\circ$ و $st = ۹۰ - ۱۲/۲ = ۷۷/۸^\circ$ و $mst = ۴/۵^\circ$. پس از جایگذاری در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\cos ms = \cos ۸۹/۳۴ \cos ۷۷/۸ + \sin ۸۹/۳۴ \sin ۷۷/۸ \cos ۴/۵ \Rightarrow ms = ۱۲/۳۷^\circ$$

٦) الف) از دو طرف معادله، لگاریتم می‌گیریم. با توجه به عبارت لگاریتمی $\log(\frac{R}{R_\odot}) = B\log(\frac{M}{M_\odot}) + \log A$ و جایگذاری مقادیر عددی، نمودار مورد نظر بدست می‌آید. برای بدست آوردن مقادیر عددی A, B از داده‌های موجود در جدول لگاریتم می‌گیریم؛ اگر خط راست حاصل از این سه نقطه را امتداد دهیم، عرض‌ازمبدأ خط مذکور مقدار A را تعیین می‌کند. با کمک شیب خط مذکور، مقدار عددیِ B هم تعیین می‌شود. بعد از عددگذاری خواهیم داشت: $A = ۰/۰۱۴ \ , \ B = -۰/۳۲۴$

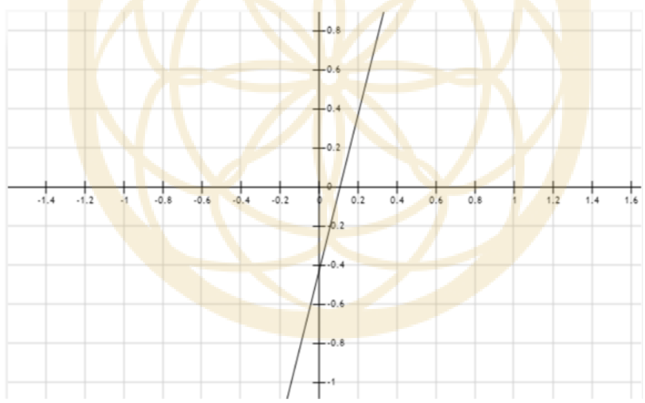
ب) می‌دانیم درخشندگی از رابطه‌ی $L = ۴\pi r^۲ \sigma T^۴$ بدست می‌آید؛ حال با نوشتن نسبت درخشندگی‌ها داریم: $\frac{L}{L_\odot} = (\frac{R}{R_\odot})^۲(\frac{T}{T_\odot})^۴$ و با توجه به صورت سوال داریم: $\frac{R}{R_\odot} = A(\frac{M}{M_\odot})^B$. با جایگذاری این مقدار در نسبت درخشندگی‌ها داریم: $\frac{L}{L_\odot} = A^۲(\frac{M}{M_\odot})^{۲B}(\frac{T}{T_\odot})^۴$ و مرتبه‌ی جرم کوتوله‌های سفید نزدیک به جرم خورشید است؛ پس داریم: $\frac{L}{L_\odot} = A^۲(\frac{T}{T_\odot})^۴$

ج) برای رسم منحنی لگاریتمی باید از دو طرف رابطه‌ی فوق لگاریتم بگیریم؛ یعنی:

$$\log(\frac{L}{L_\odot}) = \log(A^۲(\frac{T}{T_\odot})^۴) = ۴\log\frac{T}{T_\odot} + ۲\log A$$

مقدار A را هم از بخش الف بدست آورده بودیم، پس:

$$\log(\frac{L}{L_\odot}) = ۴\log\frac{T}{T_\odot} - ۳/۷ \quad \Rightarrow \quad y = ۴x - ۳/۷$$



د) اگر دمای کوتوله که برابر $۱۰^۴$ کلوین است را در عبارت بدست آمده در قسمت (ج) جایگزین کنیم؛ مقدار $L = ۱/۷۶ L_\odot$ بدست می‌آید. حال باید ببینیم که کوتوله‌ای با این درخشندگی چند سال به تابشش ادامه می‌دهد؛ برای این کار باید شرط سوال که انرژی یون‌ها ۰/۱ انرژی پتانسیل گرانشی باشد را محقق کنیم، لذا داریم: $E_I = ۰/۱E_G$ و انرژی پتانسیل گرانشی از رابطه‌ی $E_G = -\frac{۳}{۵}\frac{GM^۲}{R}$ بدست می‌آید؛ پس از جایگذاری، مقدار انرژی $E_I = ۱/۶۴ \times ۱۰^{۴۲} j$ بدست می‌آید. حال باید ببینیم، یک کوتوله‌ی سفید این میزان انرژی را ظرف چه مدت می‌سوزاند. آهنگ مصرف سوخت در ستاره‌ها برابر درخشندگی‌شان است، پس می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$t = \frac{E}{L} = \frac{۱/۶۴ \times ۱۰^{۴۲} j}{۱/۷۶ L_\odot} \ , \ L_\odot = ۳/۸۵ \times ۱۰^{۲۶} j.s^{-۱}$$

$$\Rightarrow t = ۲/۴ \times ۱۰^{۱۵} s = ۷/۶ \times ۱۰^۷ year$$