به نام او

روز اول

۱. همهٔ a و bهای طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که

$$\frac{a}{b} = b_{/}a.$$

(توضیح: اگر $a = 92$ و $b = 13$، آن‌گاه $b_{/}a$ برابر سیزده و نود و دو صدم است.)

۲. فرض کنید اعداد طبیعی w_1، w_2،... و w_n، وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنهٔ کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنهٔ باقی‌مانده نیز کامل است.

۳. مثلث دل‌خواه ABC داده شده است. وسط کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث که شامل رأس A نیست را M می‌نامیم. از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، دو خط به موازات MB و MC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط K و L قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس A در مثلث، با دایرهٔ محیطی در نقطهٔ N تلاقی کند آن‌گاه $NK = NL$.

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. فرض کنید C یک دایره و P نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس PA و PB را بر دایره رسم و نقطهٔ K را روی پاره‌خط AB انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ محیطی مثلث PBK برای بار دوم دایرهٔ C را در نقطهٔ T قطع می‌کند. قرینهٔ P نسبت به A را P' می‌نامیم. نشان دهید $\angle PBT = \angle P'KA$.

۵. در خانه‌های یک جدول $n \times m$ اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شمارهٔ ستون و شمارهٔ سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول 3×3 را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همهٔ اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول 9×5 زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب با علامت ↘ و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های 3×3 با علامت ❄ مشخص شده است. توجه کنید که خانهٔ گوشهٔ راست - بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به‌تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						↘			
۲		❄	❄	❄			↘		
۳		❄	❄	❄				↘	
۴		❄	❄	❄					↘
۵									

(راهنمایی: ابتدا به این سؤال فکر کنید که اعداد یک جدول 3×3 در چه صورت قابل صفر کردن است.)

۶. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد طبیعی در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = [\frac{2a_{n+1}}{a_n}] + [\frac{2a_n}{a_{n+1}}]$$

که در آن منظور از $[x]$، جزء صحیح عدد x است. ثابت کنید عدد طبیعی m وجود دارد که $a_m = 4$ و $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

موفق باشید