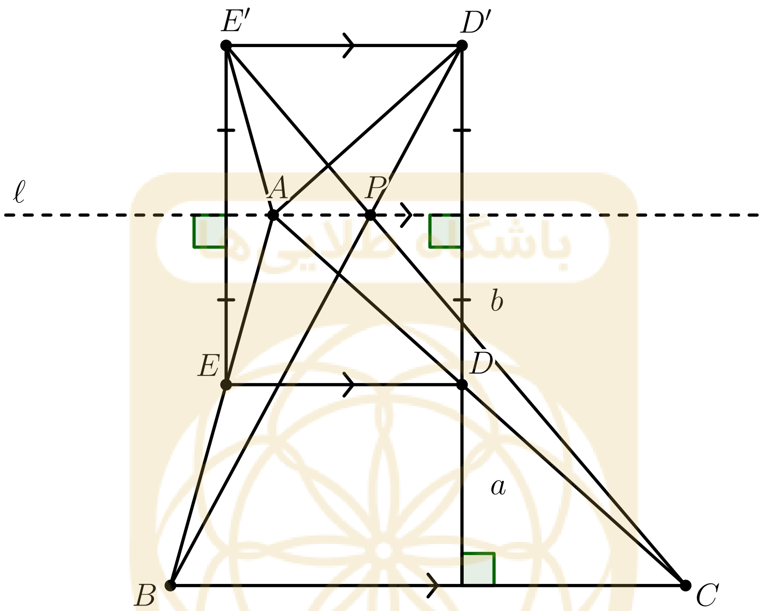
۱. مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه‌ای که $DE \parallel BC$. حال خطی به نام ℓ از A و موازی با BC رسم می‌کنیم و قرینهٔ D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می‌نامیم. ثابت کنید $D'B$، $E'C$ و ℓ همرسند.

راه حل اول.

فاصلهٔ نقطهٔ D از BC و ℓ را به ترتیب a و b در نظر می‌گیریم. فرض کنید X نقطه‌ای دلخواه بین خطوط BC و $D'E'$ باشد. اگر X روی ℓ قرار داشته باشد آنگاه نسبت فاصله‌اش از BC و $D'E'$ برابر است با $\frac{a+b}{b}$. برای نقاط بالاتر از ℓ این نسبت بیش‌تر و برای نقاط پایین‌تر از ℓ این نسبت کم‌تر است.



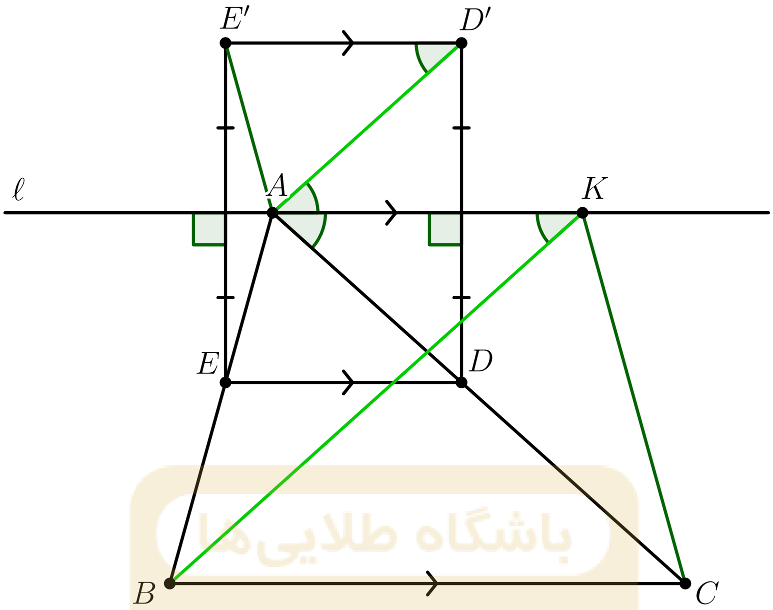
حال اگر محل برخورد خطوط $D'B$ و $E'C$ را P بنامیم آنگاه طبق قضیهٔ تالس نسبت فاصله‌ی P از خطوط BC و $D'E'$ برابر است با

$$\frac{BC}{D'E'} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{a+b}{b}.$$

طبق استدلالی که در ابتدای اثبات انجام دادیم P باید روی ℓ باشد و حکم ثابت می‌شود.

راه حل دوم.

فرض کنید K نقطه‌ای روی ℓ باشد که چهارضلعی $ABCK$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.



به وضوح $D'E' \parallel \ell$ پس می‌توان نوشت

$$\angle E'D'A = \angle D'AK = \angle KAC = \angle AKB.$$

در نتیجه $BK \parallel AD'$. به طور مشابه می‌توان نشان داد $AE' \parallel CK$ پس اضلاع مثلث‌های KBC و $AD'E'$ دوبه‌دو با یکدیگر موازی‌اند. این یعنی اگر رئوس نظیر را به یکدیگر وصل کنیم در یک نقطه همرس می‌شوند که همان خطوط $D'B$، $E'C$ و ℓ هستند.

راه حل سوم.

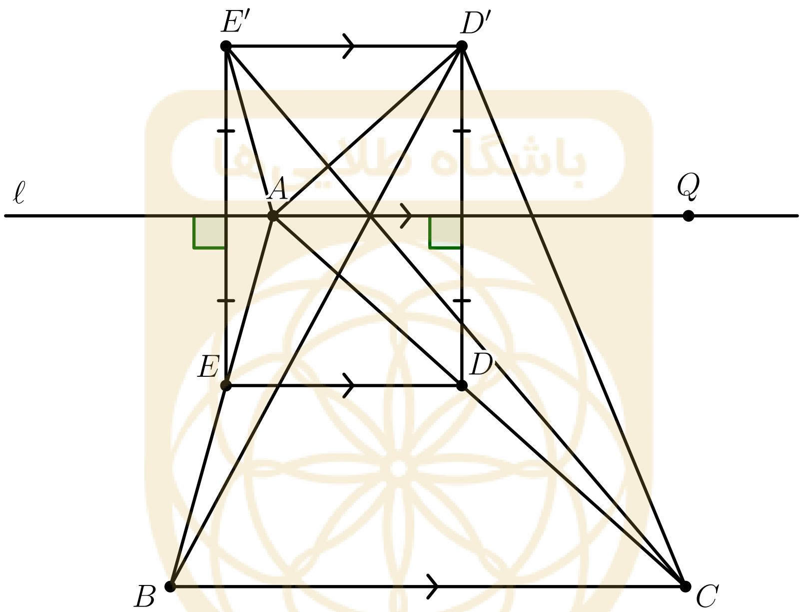
لم. *در چهارضلعی $XYZT$ می‌توان نوشت*

$$\frac{\sin\angle YXZ}{\sin\angle TXZ}=\frac{YZ}{TZ}\cdot\frac{\sin\angle XYZ}{\sin\angle XTZ}$$

برهان. دقت کنید که از قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های XYZ و XTZ به دست می‌آید

$$\frac{YZ\sin\angle XYZ}{TZ\sin\angle XTZ}=\frac{XZ\sin\angle YXZ}{XZ\sin\angle TXZ}=\frac{\sin\angle YXZ}{\sin\angle TXZ}$$

که همان رابطهٔ داده‌شده است. □



فرض کنید Q نقطه‌ای دلخواه روی خط ℓ باشد. طبق قضیهٔ سوا سینوسی در مثلث $CD'A$ برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم

$$۱=\frac{\sin\angle D'AQ}{\sin\angle QAC}\cdot\frac{\sin\angle ACE'}{\sin\angle E'CD'}\cdot\frac{\sin\angle CD'B}{\sin\angle BD'A}$$

طبق فرض‌های سوال واضح است که $\angle D'AQ=\angle QAC$. پس باید نشان دهیم

$$\frac{\sin\angle ACE'}{\sin\angle E'CD'}=\frac{\sin\angle BD'A}{\sin\angle CD'B} \qquad (۱)$$

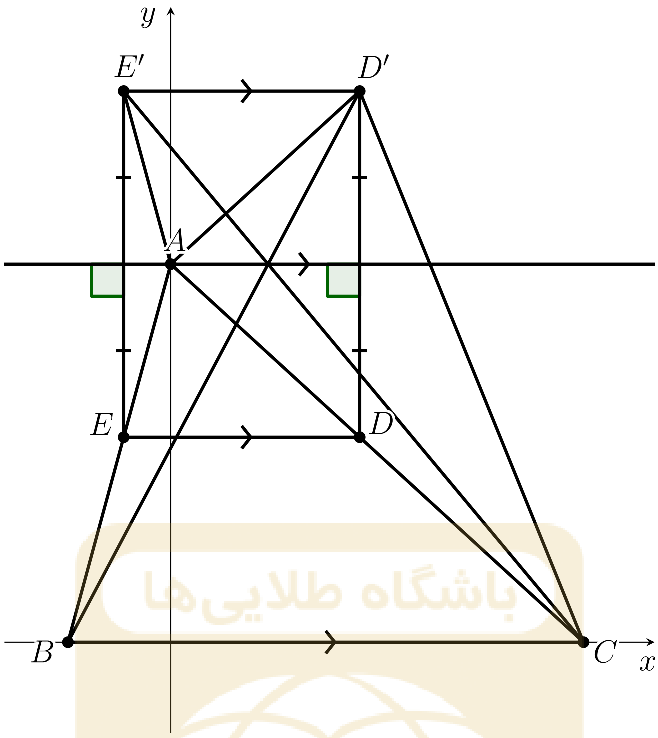
حال طبق لم می‌توانیم این دو نسبت را محاسبه کنیم:

$$\frac{\sin\angle ACE'}{\sin\angle E'CD'}=\frac{AE'}{E'D'}\cdot\frac{\sin\angle E'AC}{\sin\angle E'D'C} \quad \text{و} \quad \frac{\sin\angle BD'A}{\sin\angle CD'B}=\frac{AB}{CB}\cdot\frac{\sin\angle BAD'}{\sin\angle BCD'}$$

توجه کنید که دو مثلث ABC و $AE'D'$ با یکدیگر متشابه‌اند (زیرا AED و $AE'D'$ همنهشت هستند) پس $\frac{AB}{CB}=\frac{AE'}{E'D'}$ و $\angle E'AC=\angle D'AB$. همچنین طبق توازی $E'D'$ و BC داریم $\angle E'D'C+$

$\angle BCD' = ۱۸۰^\circ$ پس سینوس این دو زاویه نیز برابر است. این نتایج تساوی (۱) را نتیجه می‌دهند و حکم ثابت می‌شود.

راه حل چهارم.



محور مختصات را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که رأس A روی محور yها و رئوس B و C روی محور xها باشند. پس می‌توانیم مختصات آن‌ها را به ترتیب به شکل $(\circ, a)$، $(b, \circ)$ و $(c, \circ)$ نمایش دهیم. فرض کنید عرض نقاط D و E، p باشد. به وضوح معادلهٔ خط AC برابر است با $y = -\frac{a}{c}x + a$ پس طول نقطهٔ D برابر است $\frac{c(a-p)}{a}$. از آنجا که نقطهٔ D' قرینهٔ D نسبت به خط $y = a$ است مختصات آن برابر است با $\left(\frac{c(a-p)}{a}, ۲a - p\right)$. حال مختصات محل تقاطع خطوط BD' و ℓ را پیدا می‌کنیم. شیب خط BD' برابر است با

$$\frac{۲a-p}{\frac{c(a-p)}{a} - b} = \frac{a(۲a-p)}{c(a-p)-ab} \Longrightarrow y = \frac{a(۲a-p)}{c(a-p)-ab}x - \frac{ab(۲a-p)}{c(a-p)-ab}$$ معادلهٔ خط BD':

اگر قرار دهیم $y = a$ به دست می‌آید

$$\frac{a(۲a-p)}{c(a-p)-ab}x = a + \frac{ab(۲a-p)}{c(a-p)-ab} = \frac{a(b+c)(a-p)}{c(a-p)-ab} \Longrightarrow x = \frac{(b+c)(a-p)}{۲a-p}$$

پس مختصات نقطهٔ تقاطع BD' و ℓ نسبت به b و c متقارن است و طبق تقارن خط CE' نیز از همان نقطه می‌گذرد که حکم را نتیجه می‌دهد.

۲. همهٔ تابع‌های $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y،

$$f(xf(y)+f(x)+y)=xy+f(x)+f(y) \tag{1}$$

راه حل اول.

نشان می‌دهیم تنها جواب مسئله $f(x)=x$ است. در تمام راه حل منظور از "قرار دادن" جایگزینی x و y با مقادیر گفته شده در تساوی (۱) است.

مرحلهٔ اول. یافتن مقدار $f(0)$

قرار دهید $x=0$ و $y=-f(0)$ در این صورت به دست می‌آوریم $f(-f(0))=0$. پس عدد حقیقی c وجود دارد که $f(c)=0$. با قرار دادن $x=c$، $y=c$ نتیجه می‌گیریم $c^2=0$. بنابراین $f(0)=0$ و صفر تنها عدد با این خاصیت است.

مرحلهٔ دوم. نشان دادن $f(y)^2=y^2$

با قرار دادن $y=0$ به دست می‌آید $f(f(x))=f(x)$. با استفاده از این تساوی و قرار دادن $x=-\frac{y}{f(y)}$ به دست می‌آید (اگر $y\neq 0$ این کار مجاز است زیرا $f(y)\neq 0$)

$$f\left(-\frac{y}{f(y)}\right)=-\frac{y^2}{f(y)}+f\left(-\frac{y}{f(y)}\right)+f(y)$$

که بعد از ساده کردن نتیجه می‌دهد $f(y)^2=y^2$.

مرحلهٔ سوم. نشان دادن $f(x)=x$

در قسمت قبل دیدیم که برای هر x، $f(x)=x$ یا $f(x)=-x$. با جای‌گذاری به راحتی می‌توان دید که اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)=x$ در تساوی (۱) صدق می‌کند ولی در صورتی که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=-x$ در تساوی مسئله صدق نمی‌کند. تنها حالتی باقی می‌ماند که برای برخی xها $f(x)=x$ و برای برخی $f(x)=-x$ باشد. فرض کنید برای $a,b\neq 0$ داشته باشیم $f(a)=a$ و $f(b)=-b$، با قرار دادن $x=a$ و $y=b$ به دست می‌آید $f(-ab+a+b)=ab+a-b$. حال دو حالت داریم. حالت اول این است که

$$-(-ab+a+b)=ab+a-b \implies a=0$$

که با فرض $a\neq 0$ در تناقض است. در حالت دوم داریم

$$ab+a+b=-ab+a-b \implies a=-1$$

پس به ازای هر $x\neq -1$ داریم $f(x)=-x$ که با جای‌گذاری در تساوی (۱) می‌توان دید صدق نمی‌کند.

راه حل دوم.
در این راه حل مرحلهٔ اول مانند راه حل قبل است و به همین دلیل تنها به بیان مراحل بعدی می‌پردازیم.

مرحلهٔ دوم. پیدا کردن f روی برد
توجه کنید با قرار دادن $y = ۰$ به دست می‌آوریم $f(f(x)) = f(x)$. پس f روی برد خود همانی است و اگر نشان دهیم f پوشا است آنگاه نتیجه می‌شود f روی کل دامنه همانی است.

مرحلهٔ سوم. اثبات همانی بودن تابع
فرض کنید جوابی غیر از تابع همانی داشته باشیم یعنی عدد c یافت شود که $f(c) \neq c$. در این صورت با قرار دادن $x = -۱$ و $y = c + f(x) + xf(c)$ به دست می‌آید

$$f(A) = -c - f(x) - xf(c) + f(-۱) + f(c + f(x) + xf(c)) \qquad (۲)$$

که $A = -f(c + f(x) + xf(c)) + f(-۱) + c + f(x) + xf(c)$. بعد از توجه به اینکه

$$f(c + f(x) + xf(c)) = cx + f(c) + f(x)$$

و جای‌گذاری در (۲) نتیجه می‌شود

$$f(A) = x(c - f(c)) - c + f(c) + f(-۱)$$

حال توجه کنید که با تغییر x طرف راست عبارت بالا تمام اعداد حقیقی را تولید می‌کند بنابراین f پوشاست. پس f روی کل دامنه همانی است که در تناقض با وجود c است. در نتیجه تنها جواب مسئله تابع همانی است.

۳. خانه‌های یک جدول $n \times n$ به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده‌اند. به ازای چه nهایی می‌توان خانه‌های جدول را با اعداد ۱، ۲، ...، n به گونه‌ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد:

- در هر سطر تمامی اعداد ۱، ۲، ...، n آمده باشند و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.
- در هر ستون تمامی اعداد ۱، ۲، ...، n آمده باشند و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.

راه حل.

ادعا می‌کنیم فقط برای اعداد n که مضرب چهار هستند چنین جدولی وجود دارد.
طبق فرض سوال جمع خانه‌های هر سطر و هر ستون از این زیرجدول برابر $\frac{1+2+\cdots+n}{2}$ است که باید عددی طبیعی باشد. پس باید داشته باشیم $4 \mid n(n+1)$ که این نتیجه می‌دهد یا $4 \mid n$ یا $4 \mid n+1$.
اگر $4 \mid n$ جدول را به این صورت می‌سازیم که ابتدا جایگشت $a_1, \dots, a_n$ از $1, 2, \dots, n$ را در نظر می‌گیریم که جایگاه‌های زوج با اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده ۰ و ۱ دارند و جایگاه‌های فرد با اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده ۲ و ۳ دارند پر شده باشد. سپس برای ساختن جدول عدد A_{ij} را برابر a_k می‌گیریم که $k \equiv i+j-1 \pmod{n}$. می‌توان به سادگی چک کرد که هر ستون این جدول نیز یک جایشگت است و به علاوه شرط برابری جمع اعداد خانه‌های سفید و سیاه در هر سطر و ستون برقرار است.
حال اگر $4 \mid n+1$، زیرمجموعه‌ای از خانه‌های جدول متشکل از A_{ij}هایی را بگیرید که i فرد و j زوج است. باز هم طبق فرض سوال جمع خانه‌های هر سطر و هر ستون از این زیرجدول برابر $\frac{1+2+\cdots+n}{2}$ است. اما چون تعداد سطرها و خانه‌های این زیرجدول برابر نیستند جمع کل خانه‌های آن از دو محاسبه مختلف بر حسب سطرها و ستون به دو جواب مختلف می‌رسد که تناقض است. به طور دقیق‌تر

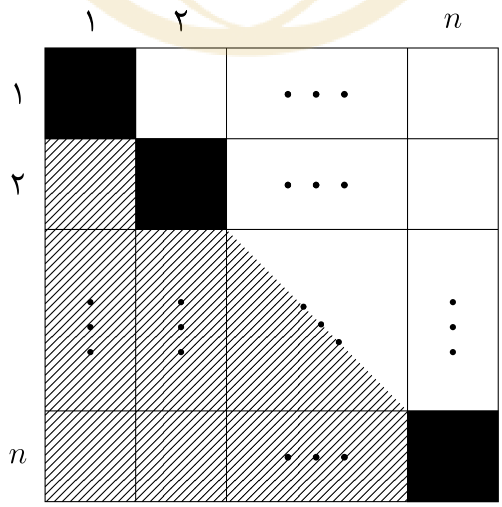
$$\sum_{i \text{ فرد}} \sum_{j \text{ زوج}} A_{ij} = \sum_{i \text{ فرد}} \Big(\sum_{j \text{ زوج}} A_{ij} \Big) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1+2+\cdots+n}{2},$$

$$\sum_{i \text{ فرد}} \sum_{j \text{ زوج}} A_{ij} = \sum_{j \text{ زوج}} \Big(\sum_{i \text{ فرد}} A_{ij} \Big) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1+2+\cdots+n}{2}.$$

پس برای چنین اعداد n هم جدول وجود ندارد (در واقع این استدلال وجود جدولی با خواص مساله برای nهای فرد را رد می‌کند) و تنها برای nهای مضرب ۴ وجود چنین جدولی ممکن است که برای آن مثالی ارائه کردیم.

۴. در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه‌ها سیاه شده‌اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق‌های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همهٔ خانه‌های جدول خود هستند.
روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانهٔ سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.
روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانهٔ سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.
ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همهٔ خانه‌های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همهٔ خانه‌های جدولش را قرمز کند.

راه حل.
خانه‌هایی که امین پیدا می‌کند، که در سطر خود تنها خانهٔ سیاه هستند و سپس ستون آن‌ها را کاملاً قرمز می‌کند، را خانه‌های ویژه بنامید. وقتی یک خانهٔ ویژه انتخاب می‌شود، از آنجا که بعد از آن نیز ستونش قرمز می‌شود، دیگر خانهٔ ویژه‌ای از آن ستون انتخاب نمی‌شود. از طرف دیگر وقتی یک خانهٔ ویژه در یک سطر انتخاب می‌شود، یعنی تنها خانهٔ سیاه آن سطر است و در آن سطر در مراحل بعدی خانهٔ ویژه‌ای انتخاب نمی‌شود. پس می‌توان گفت در پایان، هیچ دو خانهٔ ویژه‌ای هم‌سطر و هم‌ستون نیستند و تنها زمانی همهٔ خانه‌های جدول قرمز می‌شود که این خانه‌های ویژه تشکیل یک قطر پراکنده بدهند.
توجه کنید که اگر سطرها با هم جابجا شوند و ستون‌ها نیز با هم جابجا شوند، حکم مسئله تغییری نمی‌کند و روش رنگ‌آمیزی علی و امین مستقل از چینش سطرها و ستون‌هاست. حال فرض کنید امین توانسته همهٔ خانه‌ها را قرمز کند. پس خانه‌های ویژه تشکیل یک قطر پراکنده می‌دهند. طوری سطرها و ستون‌ها را جابجا کنید که اولین خانهٔ ویژه‌ای که انتخاب می‌شود در مکان $(۱,۱)$، دومین خانهٔ ویژه در مکان $(۲,۲)$ و ... تا آخرین خانهٔ ویژه در (n,n).



اکنون خانه‌های ویژه قطر اصلی جدول هستند و با توجه به تعریف خانه‌های ویژه، خانه‌های بالای قطر اصلی در ابتدا همگی سفید بوده‌اند. پس به صورت یکتا علی باید ابتدا خانهٔ (n,n) را انتخاب کند، سپس $(n-۱,n-۱)$، و ... تا در نهایت $(۱,۱)$ را انتخاب کند و همهٔ جدول در روش علی نیز قرمز می‌شود.

پس اگر امین همهٔ خانه‌ها را قرمز کند، در روش علی نیز همهٔ خانه‌ها قرمز می‌شوند و از آنجا که مسئله نسبت به روش علی و امین متقارن است، اگر علی همهٔ خانه‌ها را قرمز کند، در روش امین نیز همهٔ خانه‌ها قرمز می‌شوند و در نتیجه حکم مسئله برقرار است.

۵. دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که $a_1 = 2$ و برای هر $n \geq 1$ داریم

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n$$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n+1}a_n a_{n-1} \dots a_1$ عددی طبیعی و مربع کامل است.

راه حل اول.

با استقرا روی n نشان می‌دهیم، $a_n = 2 \cdot \frac{n^n}{n!}$. برای پایه استقرا که حکم واضح است. اگر برای n درست باشد آنگاه

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n = 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n^n}{n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)^n}{n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{a_n \cdots a_2 a_1}{n+1} &= \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n^n (n-1)^{n-1} \dots 2^2 1^1}{(n!)((n-1)!) \dots 2!1!} \\
&= \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n}{1!} \cdot \frac{n(n-1)}{2!} \dots \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \dots \frac{n!}{n!} \\
&= \frac{2^n}{n+1} \binom{n}{0}\binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}
\end{aligned}$$

توجه کنید اگر n فرد باشد،

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \left(\binom{n}{0}\binom{n}{1} \cdots \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right)^2$$

مربع کامل است. در ادامه ثابت می‌کنیم برای بی‌نهایت n عبارت $\frac{1}{n+1}a_n \cdots a_1$ صحیح و مربع کامل است. برای رسیدن به این هدف کافی است n را به گونه‌ای انتخاب کنیم که اولاً فرد باشد و ضمناً $\frac{2^n}{n+1}$ صحیح و مربع کامل باشد.

اگر عدد n را به فرم $n = 2^k - 1$ انتخاب کنیم که k فرد باشد به وضوح

$$\frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{2^k - 1}}{2^k} = 2^{2^k - k - 1}$$

صحیح و مربع کامل است. پس اثبات حکم مساله به پایان می‌رسد.

به طور خلاصه برای هر $n = 2^k - 1$ که k فرد باشد

$$\frac{1}{n+1}a_n a_{n-1} \cdots a_1 = \left(2^{2^{k-1} - \frac{k+1}{2}}\binom{n}{0}\binom{n}{1} \cdots \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right)^2$$

صحیح و مربع کامل است.

راه حل دوم.

مانند راه حل اول می‌توان نشان داد

$$\frac{a_n \cdots a_2 a_1}{n+1} = \frac{2^n}{n+1} \cdot \frac{n^n (n-1)^{n-1} \dots 2^2 1^1}{(n!)((n-1)!) \dots 2!1!} = \frac{2^n}{n+1} A$$

دقت کنید که برای هر عدد طبیعی $1 \leq i \leq n$، عدد i در مخرج کسر A، $n-i+1$بار ظاهر می‌شود، زیرا i در حاصل ضرب‌های $i!, (i+1)!, \dots, n!$ وجود دارد. همچنین در صورت کسر A نیز به وضوح توان i برابر با i است. در نتیجه A را به شکل زیر نیز می‌توان نمایش داد

$$A = \prod_{i=1}^{n} i^{2i-n-1}$$

برای nهای فرد A مربع کامل است زیرا $2i-n-1$ زوج می‌شود. در ادامه نشان می‌دهیم A عددی صحیح نیز است. فرض کنید $p \leq n$ عددی اول باشد و k بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $p^k \leq n$. آنگاه به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که توان p در تجزیهٔ A به عوامل اول برابر است با

$$\sum_{j=1}^{k} 2p^j \left(1+2+\cdots+\left[\frac{n}{p^j}\right]\right) - (n+1)\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{n}{p^j}\right] \tag{1}$$

که منظور از $[x]$ جزء صحیح x است. حال برای هر $1 \leq j \leq k$ نشان می‌دهیم

$$\begin{aligned} & 2p^j \left(1+2+\cdots+\left[\frac{n}{p^j}\right]\right) \geq (n+1)\left[\frac{n}{p^j}\right] \\ \iff \quad & p^j \left[\frac{n}{p^j}\right]\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right) \geq (n+1)\left[\frac{n}{p^j}\right] \\ \iff \quad & p^j \left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right) \geq n+1 \end{aligned}$$

طبق قضیهٔ تقسیم عدد طبیعی q و عدد صحیح $0 \leq r < p^j$ وجود دارد که $n = p^j q + r$. پس باید نشان دهیم

$$p^j(q+1) \geq p^j q + r + 1 \iff p^j \geq r+1$$

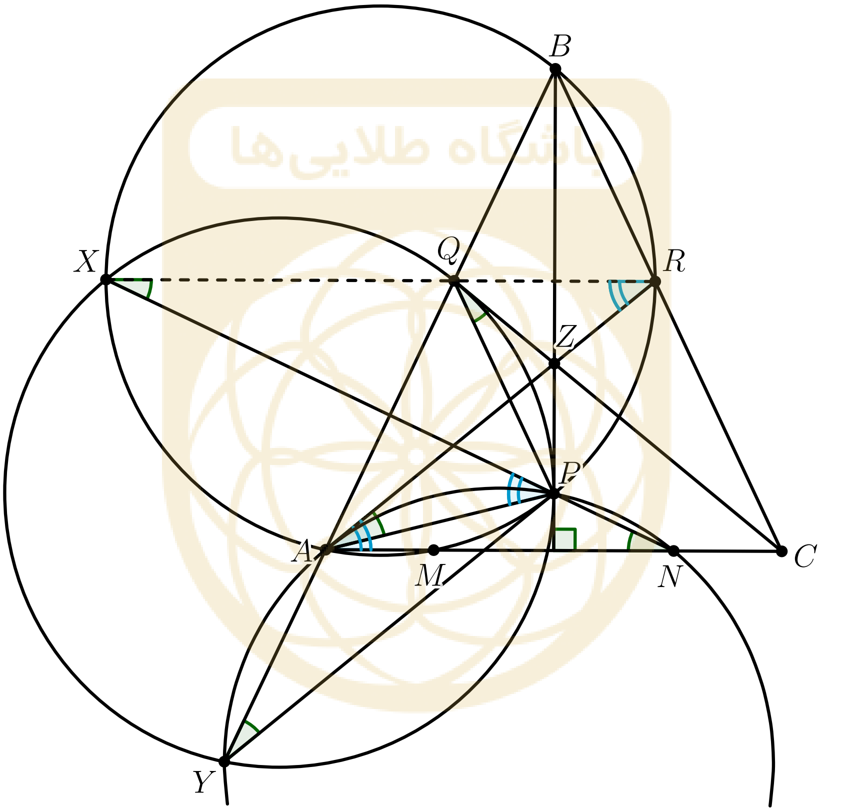
که واضح است. پس مقدار (۱) نامنفی است و این یعنی A عددی طبیعی است.

ادامهٔ راه حل مانند راه حل اول است و تنها کافی است قرار دهیم $n = 2^t - 1$ که t فرد است.

۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(BA = BC)$ نقطهٔ P روی ارتفاع رأس B به طور دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایرهٔ APB خط AC را برای بار دوم در M قطع می‌کند. قرینهٔ M نسبت به وسط AC را N می‌نامیم. خط NP دایرهٔ APB را در نقطهٔ X $(X \neq P)$ و خط AB دایرهٔ APN را در نقطهٔ Y $(Y \neq A)$ قطع می‌کند. مماس در A بر دایرهٔ APN، در نقطهٔ Z با خط BP برخورد می‌کند. ثابت کنید که CZ بر دایره محیطی مثلث PXY مماس است.

راه حل.

محل برخورد خطوط CZ و AB را Q می‌نامیم. ابتدا نشان می‌دهیم چهارضلعی $PQXY$ محاطی است. دقت کنید که $\angle PYQ = \angle PNA$ پس اگر ثابت کنیم $\angle PNA = \angle QXP$ آنگاه محاطی بودن چهارضلعی $PQXY$ نتیجه می‌شود. این نیز معادل است با توازی XQ و AN.



برای اثبات این توازی از نقطهٔ R کمک می‌گیریم که محل تقاطع AZ و BC است. می‌توان نوشت

$$\angle RAP = \angle PNA = \angle PMN = \angle PBA = \angle PBR$$

پس R نیز روی دایره محیطی مثلث APB قرار دارد. به وضوح $QR \parallel AC$ پس تنها باید نشان دهیم خط RQ از X می‌گذرد. توجه کنید که

$$\angle QRA = \angle RAN = \angle XPA = \angle XRA.$$

این تساوی هم‌خطی نقاط R، Q و X را نتیجه می‌دهد پس محاطی بودن $PQXY$ ثابت شد. دقت کنید که نقاط C، N و Q قرینهٔ نقاط A، M و R نسبت به خط BP هستند و از آنجا که پنج ضلعی $BRPMA$

محاطی است، $BQPNC$ نیز محاطی است. در نتیجه

$$\angle CQP = \angle PNA = \angle PXQ$$

و این یعنی CZ بر دایره محیطی PXY مماس است.