

به نام خدا

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی – سال ۱۴۰۳

۱. کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلاً اگر در یک لحظه ساعت زمان ۱۲:۲۳:۰۵ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱, ...

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

باشگاه طلایی‌ها

۲. همگی دنباله‌های $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq 3$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2}$$

۳. در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I ، K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B, C به ترتیب E, F را در AC, AB قطع می‌کنند. ثابت کنید دوایر EIK, FIL, AEF هم‌مرس هستند.

به نام خدا

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی - سال ۱۴۰۳

۴. در مثلث ABC ، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره $CB'M$ خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های ABD ، $CB'M$ در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره $CB'M$ را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره خط CM را نصف می‌کند.

۵. سه‌پند و غلام روی جدولی ۱۴۰۳×۱۴۰۳ که در ابتدا همه ی خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعاً ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سه‌پند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سه‌پند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشردن شدن دکمه، کاملاً به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشردن شدن دکمه، کاملاً به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند.

در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشرده شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سه‌پند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سه‌پند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سه‌پند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

۶. فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک x, y را بیابید که داشته

باشیم

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = (p + 1)^2$$