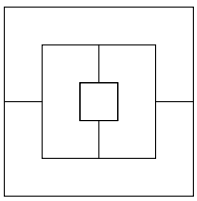
- سؤال‌های **۱۳ تا ۲۰** در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.

۱) در شکل روبرو تصویری هوایی از ۵ ساختمان شهر اتوپیا را می‌بینید که خطوط در آن نشان دهنده‌ی اختلاف ارتفاع ساختمان‌ها است. در واقع هر ناحیه‌ی بسته یک ساختمان را نشان می‌دهد که ارتفاعش عددی طبیعی بین ۱ تا ۴ است و با هیچ یک از ساختمان‌های مجاورش هم‌ارتفاع نیست. ارتفاع ساختمان‌های این شهر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۹۶ ۵) ۲۴

۲) عدد صحیح k، مرید عدد طبیعی n است اگر جایگشتی از اعداد ۱ تا n مانند $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ داشته باشیم که در آن به ازای هر $1 \le i \le n$، $|a_i - i|$ مساوی با k شود. اگر قدرت یک عدد مساوی با بزرگترین مرید آن باشد، جمع قدرت اعداد ۱ تا ۲۰ چند است؟

۱) ۸۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۶۴ ۵) ۵۵

۳) گرافی ۱۰۰ راسی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بین بعضی از رئوس آن یال قرار دهیم به طوری که بین هر دو راس حداکثر یک یال باشد و اگر راس‌ها را به هر روشی به دو بخش افراز کنیم، در حداقل یکی از بخش‌ها دور وجود داشته باشد. حداقل چند یال لازم داریم؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۲ ۵) ۶

۴) خیکول و هرکول روی یک جدول $n \times 2$ به نوبت بازی می‌کنند. در ابتدا خانه‌های جدول خالی است. هرکس در نوبت خود دوخانه‌ی مجاور را که قبلا هیچ‌کدام خط نخورده‌اند، خط می‌زند و کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است. دو خانه مجاور هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با فرض اینکه خیکول شروع کننده‌ی بازی است، به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{3, 5, 8, 13, 21, 32, 34, 64\}$، خیکول می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۷

۵) یک جدول 6×2 داریم که اعداد ۱ تا ۱۲ در خانه‌های آن نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۴ خانه را که تشکیل یک مربع 2×2 می‌دهند انتخاب کنیم و مثل شکل «الف» خانه‌های قطری را با هم جابه‌جا کنیم. هدف این است که بعد از چند مرحله اعداد جدول را مثل شکل «ب» مرتب کنیم. به ازای چند حالت قرارگیری اعداد در جدول اولیه این‌کار امکان‌پذیر است؟

a	b
c	d

→

d	c
b	a

شکل «الف»

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

شکل «ب»

۱) $\binom{12}{6}$ ۲) $6!^2$ ۳) $12!$ ۴) 2^5 ۵) $6!$

۶) خیکوله یک گراف ساده‌ی ۴ راسی کشیده است و راس‌های آن را با اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری کرده است. او از نازخیکول می‌خواهد با پرسیدن تعدادی پرسش گرافش را حدس بزند. پرسش‌هایی که نازخیکول می‌پرسد به این شکل است که «بین راس‌های x و y و z در مجموع چند یال وجود دارد؟».

به ازای چندتا از گراف‌هایی که خیکوله می‌تواند بکشد، نازخیکول با پرسیدن تعداد دلخواهی از این پرسش‌ها می‌تواند آن را حدس بزند؟ دقت کنید که راس‌ها شماره دارند و بنابراین خیکوله ۶۴ گراف مختلف می‌تواند بکشد.

۱) ۴۴ ۲) ۴۶ ۳) ۴۸ ۴) ۴۰ ۵) ۴۲

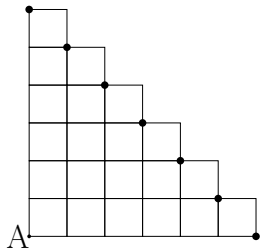
۷) دارا و سارا اعداد ۱ تا ۵ را روی تخته نوشته‌اند. آنها به نوبت بازی می‌کنند و هرکس در نوبت خود یکی از دو عمل زیر را انجام می‌دهد:

- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و حاصل جمع آنها را روی تخته می‌نویسد.
- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و قدر مطلق تفاضل آنها را روی تخته می‌نویسد.

سارا می‌خواهد عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند بیشینه شود و دارا می‌خواهد این عدد کمینه شود. با فرض اینکه سارا بازی را شروع می‌کند و هردوی آنها به بهترین شکل ممکن بازی می‌کنند، عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند چند است؟

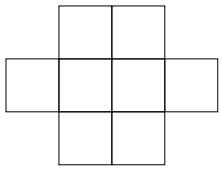
۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵ ۵) ۳

۸) قورباغه‌ای می‌خواهد از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از ۷ نقطه‌ی مشخص شده برود. با فرض اینکه او در هر مرحله می‌تواند k واحد ($۱ \le k \le ۶$) به سمت بالا یا به سمت راست بپرد، به چند طریق می‌تواند به نقاط مشخص شده برسد؟ برای مثال یک مسیر ممکن این است که در یک پرش ۶ واحد به سمت راست بپرد. یک مسیر دیگر این است که ابتدا ۳ واحد به سمت راست بپرد، سپس ۳ واحد دیگر به سمت راست بپرد.



۱) $\frac{۱۴!}{۷!\times ۷!}$ ۲) ۲×۳^۵ ۳) $۲^{۱۴}$ ۴) $\frac{۱۴!}{۶!\times ۶!}$ ۵) $\frac{۱۲!}{۲\times ۶!\times ۶!}$

۹) می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را درون خانه‌های جدولی به شکل روبرو بچینیم به‌طوری‌که اختلاف هر دو عدد مجاور بیش از یک باشد. دو خانه مجاور هستند اگر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند. برای مثال خانه‌های وسط جدول با ۶ خانه مجاور هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟



۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۱۶

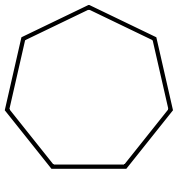
۱۰) یک جدول ۵×۵ زیباست اگر شرایط زیر را داشته باشد:

۱. در هر خانه‌ی آن عددی صحیح بین ۱ تا ۵ نوشته شده باشد (خود ۱ و ۵ هم می‌تواند باشد).
۲. عدد نوشته شده در حداقل یکی از خانه‌ها برابر ۵ باشد.
۳. عدد هر خانه از عدد خانه‌ی بالایی و راستی‌اش (در صورت وجود) کمتر نباشد.
۴. به ازای هر خانه مثل x حداقل یکی از دو عبارت زیر درست باشد:
   - عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد سطری است که x در آن قرار دارد.
   - عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد ستونی است که x در آن قرار دارد.

چند جدول زیبای ۵×۵ داریم؟

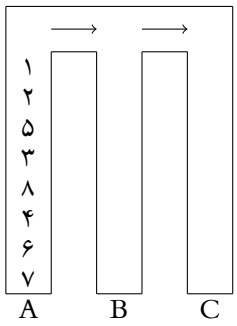
۱) ۱ ۲) $۵!^۲$ ۳) $\binom{۸}{۴}^۲$ ۴) $۵^۸$ ۵) $\binom{۹}{۴}^۲$

۱۱) خیز یک نوع میز است که ۷ پایه دارد و پایه‌های آن به صورت یک ۷ ضلعی منتظم در محیط‌اش قرار گرفته‌اند. اگر بدانیم بر اثر زلزله هر پایه‌ی خیز مستقل از بقیه پایه‌ها به احتمال ۰.۵ می‌شکند، احتمال افتادن خیز بر اثر زلزله چقدر است؟ خیز در صورتی می‌افتد که خطی گذرنده از مرکز آن وجود داشته باشد، به طوری که همه‌ی پایه‌های سالم یک طرف آن خط باشند. به عنوان مثال اگر فقط یک پایه‌ی خیز بشکند، نمی‌افتد.



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۷۱}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۵۰}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۵۷}{۱۲۸}$ ۵) $\frac{۷۸}{۱۲۸}$

۱۲) در پارکینگ خیکول‌آباد ۸ ماشین که با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند، مطابق شکل در راهروی A قرار دارند. در هر مرحله یا بالاترین ماشین راهروی A وارد یکی از راهروهای B یا C می‌شود، یا بالاترین ماشین راهروی B وارد راهروی C می‌شود.
فرض کنید در انتها تمام ماشین‌ها در ستون C باشند. در این صورت تعداد جفت اعداد متوالی در ستون C که حاصل‌جمع‌شان مضرب ۳ است حداکثر چند است؟



۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶ ۵) ۴

سؤال‌های ۱۳ تا ۲۰ در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.

یک جایگشت nتایی را «دانا» می‌نامیم، هرگاه به ازای هر i، عددی که در جای iام نوشته شده است به اضافه‌ی شماره‌ی جایگاهی که عدد i در آن نوشته شده است، برابر با $n+1$ باشد. برای مثال جایگشت $\langle ۳,۱,۴,۲ \rangle$ یک جایگشت ۴تایی داناست، اما جایگشت $\langle ۴,۳,۲,۱ \rangle$ دانا نیست.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۳) به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{۲۰۱۰, ۲۰۱۱, ۲۰۱۲, ۲۰۱۳, ۲۰۱۴\}$، جایگشت nتایی دانا وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۵ ۵) ۳

۱۴) چند جایگشت دانای ۲۱تایی وجود دارد؟

۱) $\frac{۱۰!}{۵! \times ۲^{۱۰}}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱۰!}{۵! \times ۲^{۵}}$ ۴) $۱۰!$ ۵) $\frac{۱۰!}{۵!}$

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. عدد x را از ورودی بگیر.
۲. y را برابر صفر قرار بده. s را برابر یک قرار بده.
۳. b را برابر با باقیمانده‌ی تقسیم x بر ۲ قرار بده.
۴. مقدار $s \times b$ را به y اضافه کن.
۵. x را برابر $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ قرار بده.
۶. اگر x بزرگتر از صفر بود، s را برابر $-s$ قرار بده و به سطر سه برو.
۷. پایان

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۵) به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y برابر صفر خواهد بود؟

۱) $\binom{۶}{۳}$ ۲) $\binom{۱۰}{۵}$ ۳) $۳^{۵}$ ۴) ۳۰۰ ۵) $۲^{۸}$

۱۶) به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y مضرب سه خواهد بود؟

۱) ۲×۳^۵ ۲) $\binom{۸}{۴}$ ۳) ۳۴۲ ۴) ۲۴۳ ۵) ۳×۲^۷

خالپشت‌ها، موجوداتی قابل برنامه‌ریزی هستند که در جدول‌های $n \times n$ زندگی می‌کنند. در بعضی خانه‌های این جدول‌ها دیوار وجود دارد و عبور از آنها ممکن نیست.

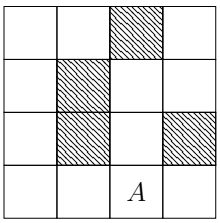
خالپشت‌ها دنباله‌ای از دستورها را دریافت می‌کنند و آنها را به ترتیب اجرا می‌کنند. دستورها می‌توانند از چهار نوع زیر باشند:

- بالا: خالپشت به خانه‌ی بالایی خود می‌رود.
- پایین: خالپشت به خانه‌ی پایینی خود می‌رود.
- چپ: خالپشت به خانه‌ی چپی خود می‌رود.
- راست: خالپشت به خانه‌ی راستی خود می‌رود.

در صورتی که اجرای یک دستور، خالپشت را به خارج از جدول یا به خانه‌ای که در آن دیوار است ببرد، خالپشت دستور را اجرا نمی‌کند و به سراغ دستور بعدی می‌رود.

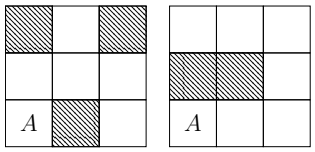
با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۷) خیکوله خالپشتی پیدا کرده است که در یک جدول ۴ × ۴ به شکل روبرو زندگی می‌کند. خالپشت در خانه‌ی A قرار دارد و خانه‌های هاشور خورده، خانه‌هایی هستند که در آنها دیوار است. خیکوله می‌خواهد دنباله‌ای با کمترین تعداد دستور به خالپشت بدهد که بعد از اجرای آن خالپشت از همه‌ی خانه‌های جدول حداقل یکبار عبور کرده باشد. تعداد دستورات این دنباله چند است؟



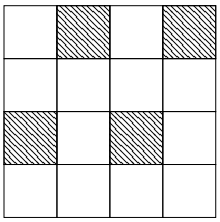
۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰ ۵) ۱۴

۱۸) نازخیکول به خیکوله دو جدول ۳ × ۳ به شکل روبرو می‌دهد که در هرکدام یک خالپشت در خانه‌ی A وجود دارد. نازخیکول از خیکوله می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، از همه‌ی خانه‌های جدول خود حداقل یکبار عبور کنند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟



۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۹ ۵) ۱۳

۱۹) حالا خیکوله به نازخیکول یک جدول ۴ × ۴ به شکل روبرو می‌دهد و به او می‌گوید که در این جدول دو خالپشت وجود دارد اما جای خالپشت‌ها را به نازخیکول نمی‌گوید. خیکوله از نازخیکول می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، مستقل از اینکه در ابتدا در کجای نقشه بوده‌اند، در انتها هردو در یک خانه قرار داشته باشند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟



۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶ ۵) ۷

۲۰) نازخیکول یک خالپشت را در یک جدول ۴ × ۴ مخفی کرده است و از خیکوله می‌خواهد جای آن‌را پیدا کند. برای این کار خیکوله می‌تواند در هر مرحله یک مربع ۲ × ۲ را مشخص کند و از نازخیکول بپرسد که «آیا خالپشت در این مربع ۲ × ۲ قرار دارد؟». با فرض اینکه خالپشت جای خود را در جدول عوض نمی‌کند، در بدترین حالت خیکوله حداقل چند سوال باید بپرسد تا بتواند جای خالپشت را تشخیص دهد؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴ ۵) ۶

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

رشته نزدیک (۱۵ نمره)

۱۳۹۲ رشته به طول ۱۳۹۲ از حروف کوچک انگلیسی با نام‌های $p_1, p_2, \dots, p_{1392}$ در اختیار داریم.

فاصله دو رشته $A = a_1, a_2, \dots, a_n$ و $B = b_1, b_2, \dots, b_n$ را با $d(A, B)$ نمایش می‌دهیم و این مقدار برابر است با تعداد اندیس‌های i که $a_i \neq b_i$. به عنوان مثال فاصله دو رشته salam و palas برابر با ۲ است زیرا تنها در مکان‌های اول و آخر با هم تفاوت دارند.

برای رشته X به طول ۱۳۹۲ مجموع فاصله‌هایش از این ۱۳۹۲ رشته را D_X می‌نامیم. به رشته‌ای مانند M به طول ۱۳۹۲، **نزدیک** می‌گوییم اگر به ازای هر رشته X به طول ۱۳۹۲:

$$D_M \leq D_X$$

الف) به ازای هر سه رشته هم طول دلخواه A, B, C نشان دهید $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. (۵ نمره)

ب) نشان دهید رشته‌ای مانند p_i از این ۱۳۹۲ رشته وجود دارد به طوری که $D_M \leq D_{p_i} \leq 2D_M$. (۱۰ نمره)

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

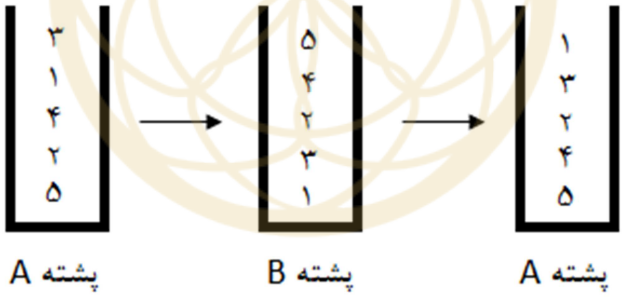
مرتب‌ساز پشته‌ای (۱۵ نمره)

مرتب‌ساز پشته‌ای یک مرتب‌ساز با دو پشته است. در ابتدا در پشته اول که آن را پشته A می‌نامیم اعداد ۱ تا n با ترتیبی دلخواه قرار دارند و پشته دوم با نام B خالی است. این مرتب‌ساز قادر است عملیات زیر را انجام دهد:

- در هر مرحله دو عدد بالای پشته A را در نظر می‌گیرد و عدد کوچکتر را به پشته B انتقال می‌دهد و این کار را آنقدر تکرار می‌کند که در پشته A تنها یک عنصر باقی بماند و آن را نیز به پشته B منتقل می‌کند. سپس اعداد پشته B را به پشته A انتقال می‌دهد(توجه کنید که چون A و B پشته هستند ترتیب عناصر برعکس می‌شود).

اگر مرتب‌ساز پشته‌ای عملیات فوق را $1 \leq k \leq n$ بار انجام دهد به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد ۱ تا n درون A، در نهایت اعداد بصورت مرتب شده در پشته A قرار خواهند گرفت (عدد ۱ در بالای پشته و عدد n در پایین پشته). جواب را بر حسب n و k محاسبه و اثبات کنید.

بعنوان مثال در شکل زیر وضعیت پشته A بعد از یک بار انجام عملیات نمایش داده شده است. در این شکل سه گام مشخص شده است که به ترتیب عبارتند از: وضعیت اولیه پشته A، نحوه قرار گرفتن اعداد در پشته B، وضعیت اعداد در پشته A بعد از عملیات.



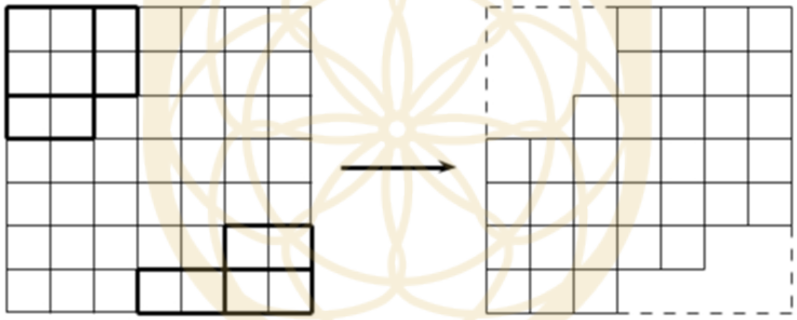
مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

شکلات تخت (۱۵ نمره)

حامد و امیرمهدی یک شکلات تخت به صورت جدولی $n \times n$ در اختیار دارند. آنها می‌خواهند در حین خوردن شکلات یک بازی نیز باهم انجام دهند. بازی به این صورت است:

حامد از گوشه بالا چپ و امیرمهدی از گوشه پایین راست بازی را شروع می‌کند و به نوبت بازی می‌کنند. اولین حرکت را حامد انجام می‌دهد. هر کس در نوبت خودش باید تکه‌ای مستطیلی (که شامل گوشه خودش باشد) را گاز بزند و حتما باید یک خانه از شکلات را بخورد (در واقع نمی‌تواند مستطیلی را انتخاب کند که همه خانه‌هایش در نوبت‌های قبلی خورده شده باشند). کسی که آخرین تکه از شکلات را بخورد بازنده است. نشان دهید امیرمهدی همیشه می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

در شکل زیر حالتی نشان داده شده است که حامد و امیرمهدی هر کدام دو نوبت بازی می‌کنند و در نوبت‌هایشان مستطیل‌های پررنگ را می‌خورند. شکل سمت راست شکلات باقی‌مانده پس از این حرکات را نشان می‌دهد.



مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

کارت‌های همانی (۲۵ نمره)

سعید ۱۳۹۲ کارت با رنگ‌های متمایز ۱ تا ۱۳۹۲ دارد و می‌خواهد با نوید یک بازی انجام دهد. در این بازی سعید کارت‌ها را دوبار دسته‌بندی می‌کند. او در هر بار دسته‌بندی کارت‌ها را به ۹۹ دسته تقسیم می‌کند به طوری که در هر دسته حداقل یک کارت قرار گیرد. سعید بعد از اینکه دسته‌بندی اول را انجام می‌دهد، دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری می‌کند و پشت هر کارت شماره دسته‌اش را می‌نویسد و سپس برای بار دوم کارت‌ها را دسته‌بندی می‌کند. سعید به نوید قول می‌دهد که در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارتی که در دسته‌بندی اول در یک دسته بوده‌اند دوباره در یک دسته قرار نگیرند. بعد از اینکه سعید دسته‌بندی دوم را انجام داد دسته‌ها را به نوید می‌دهد و نوید باید دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری کند و شماره دسته را در طرف دیگر کارت بنویسد. نوید به دنبال بیشینه کردن تعداد کارت‌هایی است که اعداد دو طرفشان با هم برابر باشد و این کارت‌ها را کارت‌های همانی می‌نامد.

الف) نشان دهید سعید هر طور کارت‌ها را دسته‌بندی کند نوید می‌تواند حداقل ۱۵ کارت همانی درست کند. (۱۵ نمره)

ب) نشان دهید سعید می‌تواند طوری کارت‌ها را دسته‌بندی کند که نوید نتواند بیشتر از ۱۵ کارت همانی درست کند. (۱۰ نمره)

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

کار گروهی (۳۰ نمره)

آقای امینی معلم کلاسی شامل nk دانش‌آموز می‌باشد. در این کلاس تعدادی رابطه دوستی بین دانش‌آموزان برقرار است (رابطه دوستی دوطرفه است، یعنی اگر دانش‌آموز a با دانش‌آموز b دوست باشد، دانش‌آموز b هم با a دوست هست). آقای امینی به کارهای گروهی خیلی علاقه‌مند هست. او می‌خواهد دانش‌آموزان را به n گروه k نفری تقسیم کند. اما برای او مهم است که افراد یک گروه همه با هم دوست باشند. ما می‌دانیم حداقل یک راه برای دسته‌بندی دانش‌آموزان با شرایط گفته شده وجود دارد. دانش‌آموزان که از این امر مطلع شده‌اند به دنبال این هستند که دسته‌بندی معلم را از قبل پیش‌بینی کنند.

الف) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی برابر با $\binom{k}{۲}n^۲$ باشد، حالتی از روابط دوستی وجود دارد که دسته‌بندی معلم به صورت یکتا مشخص شود. (۱۵ نمره)

ب) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی بیشتر از $\binom{k}{۲}n^۲$ باشد، هیچ حالتی نیست که دسته‌بندی بصورت یکتا انجام پذیرد. (۱۵ نمره)