- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ افشین در یک خانه از جدول $n \times n$ ($n > ۱$) قرار دارد و پیمان می‌خواهد او را دستگیر کند. در هر گام افشین باید به یکی از خانه‌های مجاور (مجاور ضلعی) محل کنونی‌اش که مسدود نشده باشد، برود. پیمان نیز در هر گام می‌تواند یک خانه را انتخاب کند و همه‌ی خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستون آن را مسدود کند. افشین در دو صورت زیر دستگیر می‌شود:

- در نوبت خود نتواند حرکت کند (تمام خانه‌های مجاورش مسدود شده باشند).
- پیمان محلی که افشین در آن قرار دارد را مسدود کند.

اگر پیمان نتواند محل افشین در جدول را ببیند، حداقل چند خانه باید انتخاب کند تا مطمئن باشد افشین را دستگیر کرده است؟

۱) $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ ۲) $n - ۱$ ۳) n ۴) $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ ۵) $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$

۲ اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر کس در نوبت خود عدد $۱ \leqslant i \leqslant n$ را انتخاب می‌کند و سپس i و تمام مضارب آن (که از n بیشتر نیستند) را روی تخته می‌نویسد. هر عدد باید حداکثر k بار نوشته شود. کسی که در نوبت خود نتواند عددی انتخاب کند (برای هر عدد i خود i یا حداقل یکی از مضاربش k بار نوشته شده باشند)، می‌بازد. فرض کنید $n = ۲۰۱۴$ است. به ازای چند مقدار k از بین مجموعه‌ی اعداد $\{۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵\}$ نفر اول می‌تواند برنده‌ی بازی باشد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۰

۳ دنباله‌ی $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۳۹۲} \rangle$ شامل ۱۳۹۲ عدد متمایز داده شده است. یک جادوگر قادر است در یک چشم بر هم زدن ۶۹۶ عدد متوالی از این دنباله را به‌طور صعودی مرتب کرده و بر روی مکان‌های همان ۶۹۶ عدد از کوچک به بزرگ (صعودی) بگذارد. می‌خواهیم با تعدادی درخواست از جادوگر اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. هر درخواست بدین شکل است که از جادوگر می‌خواهیم از عدد iام تا عدد $i + ۶۹۵$ام که در مجموع ۶۹۶ عدد می‌شوند را مرتب کند (عدد i می‌تواند حداقل ۱ و حداکثر ۶۹۷ باشد). با حداقل چندبار درخواست از جادوگر می‌توان اعضای دنباله را مرتب کرد؟

۱) ۳ ۲) ۱۳۹۲ ۳) ۶ ۴) $\lceil \log_۲ ۱۳۹۲ \rceil$ ۵) ۴

۴ سلطان در ابتدا عدد ۰ را روی تخته نوشته است. در هر مرحله اگر عدد x روی تخته نوشته شده باشد، او می‌تواند آن را با یکی از اعداد $\lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$، $۳x$ و $۹x + ۵$ جای‌گزین کند. به ازای چند تا از اعداد ۰ تا ۵۰۰، سلطان می‌تواند پس از تعداد متناهی گام، به آن عدد برسد؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۶۹ ۴) ۲۳۹ ۵) ۴۰۸

۵ جدولی $n \times n$ در نظر بگیرید. به یک خانه از این جدول ناسازگار می‌گوییم اگر بتوان تمام خانه‌های جدول به جز این خانه را با بلوک‌های ۳×۱ پوشاند (بلوک‌ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند و از جدول بیرون بزنند). برای $n = ۵$ و $n = ۷$ تعداد خانه‌های ناسازگار به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۱ و ۱۷ ۲) ۱ و ۹ ۳) ۹ و ۴۹ ۴) ۹ و ۹ ۵) ۹ و ۱۷

۶ جایگشت $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \dots, n$ را «سه‌گریز n تایی» می‌گوییم هرگاه $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. تعداد جایگشت‌های سه‌گریز ۷ تایی و ۸ تایی به ترتیب (از راست به چپ) چند است؟

۱) ۳۶۰ و ۰ ۲) ۳۶۰ و ۱۵۱۲ ۳) ۴۸۰ و ۱۵۱۲ ۴) ۴۸۰ و ۰ ۵) ۴۸۰ و ۴۸۰

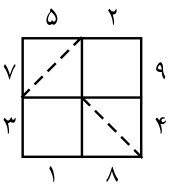
۷ جایگشت $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \dots, n$ را «سه‌گریز پیشرفته n تایی» می‌گوییم هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

- $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود نداشته باشد که $\sum_{j=۱}^{i} a_j$ باقی‌مانده‌اش بر ۳ برابر یک باشد.
- جمع هر ۶ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

تعداد جایگشت‌های سه‌گریز پیشرفته‌ی ۹ تایی چند است؟

۱) $۹ \times ۳!^۳$ ۲) $۴ \times ۳!^۳$ ۳) $۸ \times ۳!^۳$ ۴) ۰ ۵) $۲۷ \times ۳!^۳$

۸ در جدول روبه‌رو می‌توانیم با کشیدن هر یک از دو قطر هر خانه، یک آینه‌ی دو طرفه در آن خانه قرار دهیم. در واقع برای هر خانه سه حالت متصور است. یا آینه‌ای درون آن نیست و یا این‌که یکی از قطرهای آن کشیده شده است. برای مثال در شکل روبه‌رو دو آینه که با خط‌چین مشخص شده‌اند در جدول وجود دارند. به ازای هر وضعیت جدول، مقدار آن وضعیت به این صورت تعیین می‌شود که هر دو عددی که همدیگر را می‌بینند (با توجه به آینه‌ها) در هم ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها، مقدار آن وضعیت جدول را مشخص می‌کند (دید اعداد به گونه‌ای است که در صورتی که آینه‌ای وجود نداشته باشد هر عددی، عدد مقابل خود را می‌بینند). برای مثال مقدار وضعیت روبرو به این صورت محاسبه می‌شود: $۱ \times ۹ + ۳ \times ۸ + ۲ \times ۴ + ۵ \times ۷ = ۷۶$.
کم‌ترین مقداری که می‌توان با کمک آینه‌ها برای این جدول به دست آورد چند است؟

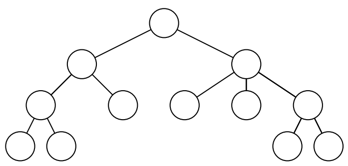


۱) ۷۰ ۲) ۶۹ ۳) ۶۷ ۴) ۶۸ ۵) ۶۶

۹ در یک گراف فاصله‌ی بین دو رأس طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس است. قطر یک گراف بیش‌ترین فاصله‌ی بین هر دو راس از آن گراف می‌باشد. حال مجموعه‌ی تمام درخت‌های متمایز ۷ راسی با راس‌های $۱, ۲, \dots, ۷$ را در نظر بگیرید (دو درخت متمایزند اگر و فقط اگر دو راس مانند i, j وجود داشته باشند که یال ij در یکی وجود داشته باشد و در دیگری نباشد). فرض کنید می‌خواهیم با اضافه کردن تعدادی یال به این مجموعه یک درخت بزرگ ایجاد کنیم. کم‌ترین قطر ممکن برای این درخت چند است؟

۱) ۱۳ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۷

۱۰ درخت روبه‌رو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اعداد $۱, ۲, \dots, ۱۲$ را در رأس‌های این درخت قرار دهیم به طوری که عدد هر رأس از اعداد فرزندان آن بیش‌تر باشد. به چند حالت این کار امکان‌پذیر است؟



۱) ۱۴۷۸۴۰ ۲) ۴۴۳۵۲۰ ۳) ۷۳۹۲۰۰ ۴) ۸۸۷۰۴۰ ۵) ۲۹۵۶۸

۱۱ خیکوله یک دستمال کاغذی ۴×۴ پیدا کرده است و ۱۶ پوست‌پسته جمع کرده است که iامین آنها در i ثانیه می‌سوزد. او می‌خواهد پوست‌پسته‌ها را روی خانه‌های دستمال کاغذی بگذارد و خانه‌ی بالا سمت راست آن را آتش بزند تا کل دستمال کاغذی بسوزد. نحوه‌ی سوختن دستمال کاغذی به این نحو است:

- هر وقت یک خانه‌ی دستمال کاغذی آتش گرفت، اگر روی آن خانه یک پوست‌پسته باشد که در t ثانیه می‌سوزد، بعد از t ثانیه آن خانه می‌سوزد و خانه‌های مجاور ضلعی‌اش (درصورتی که قبلا آتش نگرفته باشند) آتش می‌گیرند.

حال خیکوله می‌خواهد طوری پوست‌پسته‌ها را روی جدول بچیند که در هر خانه یک پوست پسته قرار بگیرد و کل دستمال کاغذی در کم‌ترین زمان ممکن بسوزد. این کم‌ترین زمان چقدر است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸ ۵) ۲۷

۱۲ اعداد $\{۲^i | ۰ \leqslant i \leqslant ۹\}$ روی تخته نوشته شده‌اند. مولین و مرلون بازی زیر را انجام می‌دهند: در هر مرحله بازیکنی که نوبت اوست، دو عدد x و y را انتخاب می‌کند و بعد از پاک کردن آن‌ها عدد $\lceil \frac{x+y}{۲} \rceil$ یا $\lfloor \frac{x+y}{۲} \rfloor$ را روی تخته می‌نویسد و این روند ادامه می‌یابد تا فقط یک عدد باقی بماند. هدف مولین بیشینه کردن این عدد و هدف مرلون کمینه کردن آن است. اگر هر دو بازیکن بهترین بازی خود را انجام دهند و مولین شروع‌کننده‌ی بازی باشد و عدد نهایی برابر p باشد، باقی‌مانده‌ی p بر ۵ برابر چند است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۴

---

۴۰ توپ را در ۵ جعبه با شماره‌های $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ قرار می‌دهیم (جعبه‌ها می‌توانند خالی هم باشند). عمل «وسط‌به‌دوطرف» عملی است که در طی آن دو توپ از جعبه‌ی $۲ \leqslant i \leqslant ۴$ (در صورت وجود) خارج می‌شوند و یکی از آن‌ها به جعبه‌ی $i - ۱$ و یکی به جعبه‌ی $i + ۱$ می‌رود.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۳ تعداد راه‌های قرار دادن توپ‌ها در جعبه‌ها به نحوی که تعداد توپ‌های جعبه‌ی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد، در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

۱) $[۲۰۰, ۴۰۰]$ ۲) $[۶۰۰, ۸۰۰]$ ۳) $[۴۰۰, ۶۰۰]$ ۴) $[۸۰۰, +\infty)$ ۵) $[۰, ۲۰۰]$

۱۴ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها در سبد حالت «گوشه‌گیر» می‌گوییم اگر با انجام تعدادی عمل وسط‌به‌دوطرف از آن حالت به حالتی برسیم که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی اول و آخر قرار بگیرند. تعداد حالت‌های گوشه‌گیر چند است؟

۱) تعداد حالت‌هایی که تعداد توپ‌های جعبه‌ِی اول با جعبه‌ی پنجم و جعبه‌ی دوم با جعبه‌ی چهارم برابر باشد.
۲) صفر
۳) ۴۱
۴) ۴۰
۵) تعداد حالت‌هایی که مجموع توپ‌های خانه‌های دوم و سوم و چهارم زوج باشد.

۱۵ به حالتی از قرارگیری توپ‌ها «بی‌حرکت» می‌گوییم اگر نتوان هیچ عمل وسط‌به‌دوطرفی روی آن انجام داد. با شروع از یک حالت دلخواه حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا به یک وضعیت بی‌حرکت برسیم؟

۱) ۷۹ ۲) ۸۰ ۳) ۷۷ ۴) ۷۵ ۵) ۷۸

ده نفر با شماره‌های ۱, ۲, . . . , ۱۰ در صف یک بانک قرار دارند که سه باجه برای انجام امور متقاضیان دارد. در ابتدا همه‌ی باجه‌ها خالی هستند. با شروع از فرد شماره ۱، هر کس به اولین باجه خالی می‌رود و هرگاه کار کسی در باجه‌ای تمام شد، بلافاصله نفر اول صف جایگزین او می‌شود. علاوه بر این، کار هر نفر حداقل یک ثانیه طول می‌کشد و هیچ دو نفری دقیقا همزمان باجه‌ها را ترک نمی‌کنند. پس از اتمام کار نفر دهم این فرآیند پایان می‌یابد. در این فرآیند دو نفر را «همزمان» گوییم اگر لحظه‌ای وجود داشته باشد که در آن هردو در حال انجام کار در باجه‌ها باشند. «وزن» یک زوج را برابر با قدرمطلق تفاضل شماره‌های این دو نفر فرض می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ اگر {۲, ۶} و {۳, ۷} دو زوج همزمان باشند، چندتا از زوج‌های زیر نمی‌توانند همزمان باشند؟

{۷, ۱}, {۹, ۶}, {۷, ۴}, {۴, ۳}, {۸, ۲}, {۵, ۱}

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲ ۵) ۵

۱۷ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای تعداد زوج های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۱۷, ۱۷ ۲) ۱۰, ۲۴ ۳) ۱۹, ۲۴ ۴) ۱۷, ۲۴ ۵) ۱۰, ۱۹

۱۸ کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار ممکن برای مجموع وزن زوج‌های همزمان به ترتیب چند است؟

۱) ۸۱, ۲۵ ۲) ۸۰, ۲۵ ۳) ۸۱, ۲۳ ۴) ۸۰, ۲۴ ۵) ۸۱, ۲۴

۱۹ اگر {۲, ۵} و {۴, ۸} و {۶, ۹} سه زوج همزمان باشند، این افراد به چند ترتیب مختلف می‌توانند در باجه‌ها قرار گیرند؟ (دو ترتیب مختلف محسوب می‌شوند، اگر و فقط اگر زوجی وجود داشته باشد که در یکی همزمان باشند و در دیگری همزمان نباشند.)

۱) ۱۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴ ۵) صفر

جدولی $n \times n$ داریم (طول ضلع n است) که هر واحد ضلع آن یک چوب‌کبریت است. ما هر بار زیرمجموعه‌ای از چوب‌کبریت‌ها (این زیرمجموعه می‌تواند تهی باشد) را برمی‌داریم و سپس تعداد مسیرهای ممکن از گوشه‌ی پایین چپ به بالا راست (فقط با حرکات راست و یا بالا) را می‌شماریم. پس از این‌کار چوب‌کبریت‌ها را به حالت اولیه برمی‌گردانیم و دوباره زیرمجموعه‌ای جدید را حذف می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۰ فرض کنید $n = ۳$ است. به ازای تمام زیرمجموعه‌های ممکن از چوب‌کبریت‌ها حرکت بالا را انجام داده و عدد نهایی را روی تخته نوشته‌ایم. در نهایت روی تخته چند عدد مختلف وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱ ۵) ۱۶

۲۱ فرض کنید $n = ۴$ است. تنها زیرمجموعه‌هایی از چوب کبریت‌ها را در نظر بگیرید که تعداد مسیرهای معتبرشان برابر ۶۰ است. این بار به ازای هر کدام از این زیرمجموعه‌ها تعداد چوب‌کبریت‌های حذف‌شده را روی تخته می‌نویسیم. کمینه و بیشینه عددی که روی تخته نوشته شده چند است؟

۱) ۱۰, ۲ ۲) ۸, ۲ ۳) هیچ حالتی ۶۰ مسیر معتبر ندارد. ۴) ۱۰, ۱ ۵) ۸, ۱

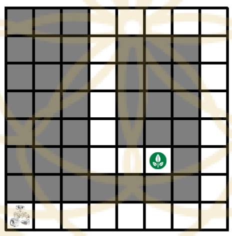
۲۲ فرض کنید $n = ۵$ است. به ازای چند تا از اعداد مجموعه‌ی {۳۲, ۶۴, ۱۲۸, ۲۴۳, ۲۴۹} می‌توان چوب‌کبریت‌ها را به‌شکلی حذف کرد که تعداد مسیرهای معتبر برابر با آن عدد شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱

جدولی $n \times n$ ($n > ۱$) داریم که یک ربات در گوشه‌ی پایین چپ آن قرار دارد. این ربات یک برنامه دریافت کرده و آن را دستور به دستور اجرا می‌کند و هر بار پس از انجام آخرین دستور دوباره به دستور اول بازمی‌گردد و همین کار را تکرار می‌کند. دستورات این برنامه می‌تواند شامل چهار حرکت (بالا، پایین، چپ و راست) باشد که روبات در صورت امکان آن‌ها را انجام می‌دهد و در غیر این صورت (در صورتی که از جدول خارج شود و یا به خانه‌ی غیرمجاز هدایت شود) به سراغ دستور بعدی می‌رود. فرض کنید طول یک برنامه تعداد دستورهای آن است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ جدول زیر را در نظر بگیرید. خانه‌های خاکستری غیرمجاز هستند. طول کوتاه‌ترین برنامه‌ای که ربات با اجرای آن حداقل یک بار به خانه‌ی هدف (انتهای مسیر سفید) می‌رسد، چند است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۰ ۵) ۲۱

۲۴ فرض کنید تمام خانه‌های جدول مجاز هستند. می‌خواهیم برنامه‌ای به ربات دهیم تا تمامی خانه‌های جدول را حداقل یک بار بپیماید (مهم نیست ربات در انتها در کدام خانه است). طول کوتاه‌ترین برنامه با این هدف برای $n = ۱۰$ چند است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۱۵

۲۵ خانه‌ای را در جدول خوب می‌نامیم که اگر تنها آن خانه غیرمجاز باشد، برنامه‌ای به طول حداکثر $۳n$ وجود داشته باشد که تمام خانه‌های مجاز را بپیماید. برای $n = ۷$ چند خانه‌ی خوب در جدول وجود دارد؟ (خانه‌ی محل استقرار ربات یعنی خانه‌ی گوشه‌ی چپ پایین خوب نیست.)

۱) ۴۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۴۳ ۵) ۱۱

بازی رنگی

دیروز ببعی و گاوی پس از چریدن طولانی خسته شدند و تصمیم گرفتند یک بازی انجام دهند. در این بازی ۳ دایره وجود دارد که هر یک به $3n$ قطاع برابر تقسیم شده‌اند. ابتدا ببعی هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۱ را با یکی از رنگ‌های زرد، نارنجی و بنفش رنگ می‌کند. گاوی پس از دیدن رنگ‌آمیزی ببعی، هر یک از قطاع‌های دایره‌ی شماره‌ی ۲ را با یکی از همین سه‌رنگ، رنگ می‌کند. ببعی نیز پس از دیدن رنگ‌آمیزی گاوی، دایره‌ی شماره‌ی ۲ را روی دایره‌ی شماره‌ی ۱ می‌گذارد و آن را به هر مقداری که می‌خواهد، می‌چرخاند به طوری‌که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌ی شماره‌ی ۱ منطبق شود. حال دایره‌ی شماره‌ی ۳ روی دو دایره‌ی دیگر گذاشته می‌شود، طوری که هر قطاع آن بر قطاعی از دایره‌های زیرین منطبق شود. پس از این کار هر قطاع دایره‌ی شماره‌ی ۳ به صورت زیر رنگ می‌شود:

- اگر رنگ دو قطاع زیرین دایره‌های شماره‌ی ۱ و ۲ یکسان بود، این قطاع را نیز به همان رنگ درمی‌آوریم.
- اگر رنگ دو قطاع زیرین یکسان نبود، رنگ این قطاع را به رنگ سوم (رنگی که در دو قطاع زیرین نیامده است) درمی‌آوریم.

گاوی اصلیتی هلندی دارد و به همین دلیل به رنگ نارنجی بسیار علاقه‌مند است و می‌خواهد تا حد ممکن تعداد قطاع‌های نارنجی دایره‌ی شماره‌ی ۳ زیاد شود؛ در حالی که ببعی می‌خواهد از این کار جلوگیری کند.

الف) ثابت کنید گاوی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداقل n قطاع نارنجی داشته‌باشد.(۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید ببعی می‌تواند طوری بازی کند که دایره‌ی شماره‌ی ۳ در انتها حداکثر n قطاع نارنجی داشته‌باشد.(۲۰ نمره)

وزنه‌ها و ماشین جادویی

ببعی $3n-2$ وزنه‌ی یک گرمی و دو وزنه‌ی نیم گرمی دارد که همگی از نظر ظاهری کاملا شبیه به‌هم هستند $(n>2)$. وزنه‌ها با شماره‌های ۱ تا $3n$ شماره‌گذاری شده‌اند، ولی وزن هیچ وزنه‌ای را نمی‌دانیم. گاوی یک ماشین جادویی دارد. در هربار استفاده از ماشین جادویی، گاوی می‌تواند ۲ وزنه را روی ماشین جادویی‌اش قرار دهد و ماشین جادویی به او می‌گوید که آیا مجموع وزن این دو وزنه، عددی طبیعی است یا خیر.

الف) ثابت کنید گاوی همواره می‌تواند با حداکثر $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی خود یک وزنه‌ی نیم گرمی را پیدا کند. (۲۰ نمره)

ب) ثابت کنید گاوی نمی‌تواند روشی ارائه دهد که با کمتر از $2n-1$ بار استفاده از ماشین جادویی تضمین کند که یک وزنه‌ی نیم‌گرمی را می‌تواند پیدا کند. (۳۰ نمره)

گاوی خسیس

کشوری که گاوی و ببعی در آن زندگی می‌کنند، دارای n شهر می‌باشد $(n > 2)$. بین برخی از شهرهای کشور، جاده‌ی دوطرفه کشیده شده است. هم‌چنین می‌دانیم بین هیچ دو شهری بیش از یک جاده وجود ندارد. از آن‌جایی که مردم این کشور صمیمی هستند، می‌دانیم در هر شهری که باشیم، با استفاده از جاده‌های این کشور می‌توانیم به هر شهر دیگر که بخواهیم، برسیم. ارزش یک شهر برابر است با تعداد شهرهایی که به طور مستقیم با یک جاده به آن شهر متصل هستند. ببعی در یکی از شهرهای این کشور قرار دارد. گاوی که در شهر دیگری است، می‌خواهد به دیدن ببعی برود. می‌دانیم اگر گاوی در مسیر رفتن به شهر ببعی، از شهری با ارزش k عبور کند، باید k تومان عوارض بدهد (شهر آغاز و پایان مسیر نیز مشمول عوارض هستند). از آن جایی که گاوی دوست ندارد زیاد پول خرج کند، مسیری را انتخاب می‌کند که کمترین هزینه را داشته باشد.

الف) فرض کنید محل گاوی و ببعی مشخص باشد. ثابت کنید به ازای هر n $(n > 2)$، می‌توان جاده‌های بین شهری را طوری قرار داد که گاوی مجبور باشد دست کم $3n - 5$ تومان به دولت عوارض بدهد. (۱۵ نمره)

ب) ثابت کنید به ازای هر n $(n > 2)$، هر طوری جاده‌ها را قرار دهیم و ببعی و گاوی در هر دو شهری باشند، گاوی با حداکثر $3n - 5$ تومان می‌تواند به هدفش برسد. (۳۵ نمره)

انتقال مهره‌های گاوی

نقاط صحیح صفحه مختصات (نقاطی که طول و عرض آن‌ها عددی صحیح است) را در نظر بگیرید. ببعی n نقطه از این نقاط را به رنگ آبی درآورده است و n مهره نیز در n نقطه‌ی دیگر از صفحه قرار داده است (در هر نقطه یک مهره). می‌دانیم نقاط آبی و مهره‌ها ویژگی‌های زیر را دارند:

- در هیچ نقطه‌ی آبی، مهره‌ای قرار ندارد.
- هیچ دو نقطه‌ی آبی در یک سطر نیستند.

ببعی و گاوی تصمیم می‌گیرند تا مهره‌ها را به نقاط آبی برسانند (هر مهره را در یک نقطه‌ی آبی قرار دهند). هر دو برای این کار یک ماشین مخصوص به خود دارند. ماشین گاوی در هر مرحله می‌تواند تعدادی از مهره‌ها (و یا هیچ مهره‌ای) را ثابت نگه دارد و بقیه را به طور همزمان یک واحد به بالا، چپ، راست یا پایین حرکت دهد. توجه کنید که جهت حرکت مهره‌های مختلف در یک مرحله می‌تواند با هم یکسان نباشد و هم‌چنین پس از انجام یک مرحله ممکن است در یک خانه بیش از یک مهره قرار گیرد.
ماشین ببعی نیز مانند ماشین گاوی عمل می‌کند با این تفاوت که ماشین ببعی در یک مرحله نمی‌تواند بیش از یک مهره را در یک نقطه قرار دهد.

فرض کنید کمترین تعداد مراحل لازم برای رساندن مهره‌ها به نقاط آبی به طوری که در هر نقطه‌ی آبی یک مهره قرار گیرد، با استفاده از ماشین گاوی t_1 و با استفاده از ماشین ببعی t_2 باشد. ثابت کنید $t_1 = t_2$. (۶۰ نمره)

توجه: شما با اثبات $t_2 \leq 2t_1$ نیمی از نمره را می‌توانید بگیرید.