- سؤال‌های **۱۶ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ در جزیره‌ای ۱۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هر نفر یا سفیدپوست است، یا سیاه‌پوست و یا سرخ‌پوست (دقیقن یکی از این سه حالت). نوع یک جزیره به شکل زیر تعیین می‌شود:

- اگر حداقل ۹۰ سفیدپوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سفید» است.
- اگر حداقل ۸۰ سیاه‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سیاه» است.
- اگر حداقل ۷۰ سرخ‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سرخ» است.

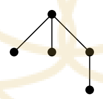
می‌دانیم جزیره دقیقن یکی از سه نوع سفید، سیاه و سرخ است. ما به جزیره رفته‌ایم. حداقل چند نفر از افراد جزیره را باید ببینیم تا بتوانیم نوع جزیره را تشخیص دهیم؟

۱) ۵۱ ۲) ۲۱ ۳) ۶۱ ۴) ۸۱ ۵) ۴۱

۲ یک جایگشت نزولی از اعداد ۱ تا n داریم. در هر گام دو عدد متمایز به صورت تصادفی انتخاب شده و به احتمال $\frac{1}{2}$ جای آنها عوض می‌شود. اگر پس از چند گام این جایگشت مرتّب شود (یعنی اعداد به ترتیب صعودی در جایگشت قرار بگیرند)، علیرضا می‌برد و در غیر این صورت سپهر برنده‌ی بازی است (تعداد گام‌ها محدودیتی ندارد). به چه احتمالی علیرضا برنده می‌شود؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{n}$ ۴) $\frac{1}{n!}$ ۵) ۱

۳ یک گراف ساده‌ی ۱۰۰ رأسی داریم که زیرگراف به شکل زیر ندارد:



توجه کنید منظور از زیرگراف لزومن القایی نیست. حداکثر تعداد یال‌های این گراف چیست؟ (زیرگراف القایی زیرگرافی است که انتخاب رأس‌ها در آن اختیاری است ولی بین دو رأس از زیرگراف یال وجود دارد اگر و تنها اگر در گراف اصلی بین آنها یال وجود داشته باشد)

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۰۰ ۵) ۱۲۰

۴ به جایگشت $p_1, p_2, \dots, p_n$ از اعداد ۱ تا n زیبا گوییم هرگاه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم: $p_i \leqslant p_{i+1} + 3$. به ازای $n = 9$، باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد جایگشت‌های زیبا بر ۵ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲ ۵) ۴

۵ به گراف ۱۶ رأسی G گراف **فرد زده** گوییم، اگر هر رأس آن هم در دوری به طول ۳ و هم در دوری به طول ۵ و ... و هم در دوری به طول ۱۵ باشد. حال فرض کنید یک گراف دوبخشی کامل داریم که هر بخش آن ۸ رأس دارد. می‌خواهیم تعدادی یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود. حداقل چند یال باید اضافه کنیم؟

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶ ۵) ۱

۶ در سؤال قبل فرض کنید یک گراف ۱۶ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی ۴ رقمی متمایز است. دو رأس در این گراف به هم یال دارند، اگر و تنها اگر رشته‌های متناظر آن رأس‌ها دقیقن در یک رقم تفاوت داشته باشند. حداقل چند یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود؟

۱) ۸ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۳

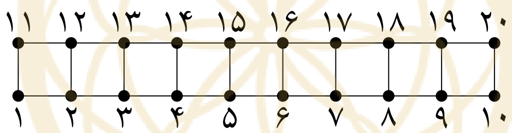
۷ یک جدول $n \times n$ داریم که در هر خانه‌ی آن یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. چهار خانه شامل عدد ۰ را که از محل‌های تقاطع دو سطر و دو ستون به دست آیند، **صفرــ مستطیلی** می‌نامیم. هم‌چنین چهار خانه شامل عدد ۱ را که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر و هم‌ستون نیستند، **یکــ پراکنده** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفرــ مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یکــ پراکنده وجود نداشته باشد.

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴ ۵) ۷

۸ همان سؤال قبل را در نظر بگیرید. چهار خانه شامل عدد ۱ را که هم‌سطر باشند، **یکــ خطی** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفرــ مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یکــ خطی وجود نداشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۶

۹ گراف ۲۰ رأسی زیر با رأس‌های ۱, ۲, ..., ۲۰ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان از این گراف تعدادی یال حذف کرد به طوری که گراف هم‌بند بماند؟ توجه کنید یک حالت این است که هیچ یالی حذف نکنیم.



۱) ۲۰۷۳۹۱ ۲) ۹۴۶۰۲۵ ۳) 2×4^{10} ۴) ۸۳۴۲۶۱ ۵) ۷۳۸۶۳۴

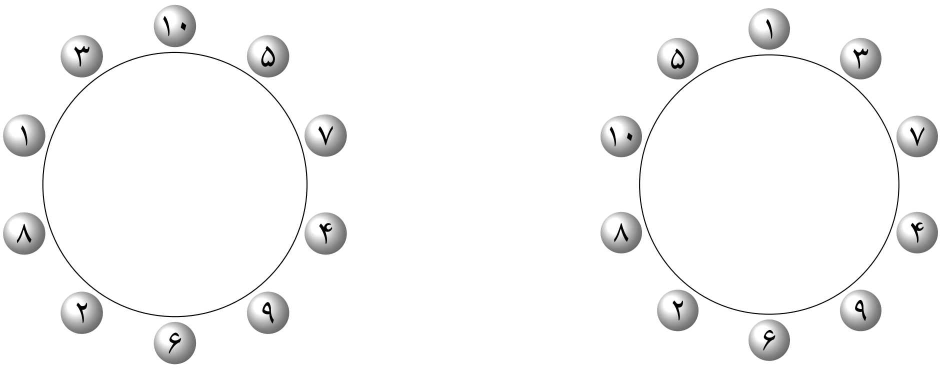
۱۰ علیرضا در صفحه‌ی مختصات قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند از نقطه‌ای با مختصات صحیح (a,b) به یکی از نقاط $((2a) \% 1024, b)$ و یا $(a, (2b) \% 1024)$ برود که در آن‌ها منظور از $x \% y$ باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر y است. علیرضا یک نقطه‌ی (x,y) برای شروع انتخاب می‌کند که $0 \leqslant x \leqslant 50, 0 \leqslant y \leqslant 100$ باشد. اگر (u,v) نقطه‌ای با بیش‌ترین مجموع مختصه‌ها ($u+v$ بیشینه) در بین تمامی نقاط قابل رسیدن با حرکات بالا باشد، باقی‌مانده تقسیم $u+v$ بر ۵ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۲

۱۱ دو مجموعه‌ی ناتهی A و B نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر هر عضو مجموعه‌ی A نسبت به هر عضو مجموعه‌ی B اول باشد (دو عدد نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر ب.م.م شان یک باشد). فرشید و فرشاد هر کدام یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\{1, 2, \dots, 9\}$ انتخاب می‌کنند. احتمال این که مجموعه‌های فرشید و فرشاد نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

۱) $\frac{723}{37303}$ ۲) $\frac{5061}{255 \times 2^{10}}$ ۳) $\frac{6084}{1+255 \times 2^{10}}$ ۴) $\frac{2530}{255 \times 2^{9}}$ ۵) $\frac{5060}{1+255 \times 2^{10}}$

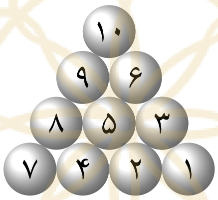
۱۲ ده توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰ به ترتیب دور یک دایره قرار دارند. در هر مرحله می‌توان دو توپ مجاور مانند A و B در نظر گرفت و آن‌ها را به همان ترتیب در میان دو توپ مجاور دیگر قرار داد. برای مثال با برداشتن توپ‌های ۱ و ۳ و گذاشتن آن‌ها در میان دو توپ ۵ و ۷ می‌توان از شکل سمت چپ به شکل سمت راست رسید:



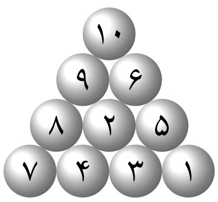
از میان !۹ جایگشت دوری که این توپ‌ها دارند، به چند جایگشت می‌توان رسید؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۹!}{۲}$ ۲) !۸ ۳) $\frac{۹!}{۶}$ ۴) !۹ ۵) !۸ − !۹

۱۳ در سؤال قبل فرض کنید ۱۰ توپ در آرایشی به شکل زیر قرار گرفته‌اند:



در هر مرحله می‌توان سه توپ را که دوبه‌دو بر یک‌دیگر مماس هستند، انتخاب کرد و مثلث آن‌ها را یک واحد در جهت ساعت‌گرد چرخاند. برای مثال با اعمال این حرکت روی توپ‌های ۲، ۳ و ۵ در شکل بالا به شکل زیر می‌رسیم:



از حالت اولیه به چند آرایش متفاوت از !۱۰ آرایش ممکن برای توپ‌ها می‌توانیم برسیم؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۱۰!}{۲}$ ۲) $\frac{۱۰!}{۳}$ ۳) !۹ ۴) !۱۰ ۵) $\frac{۱۰!}{۶}$

۱۴ در ابتدا عدد $x = ۰$ را داریم. در هر مرحله می‌توانیم عدد x را به یکی از دو عدد $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ یا $۴x + ۲$ تبدیل کنیم. با استفاده از این حرکات چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{۷۷, ۵۱۱, ۲۱۰, ۱۷۰, ۲۳۸\}$ را می‌توان ساخت؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۰

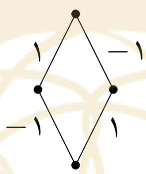
۱۵ اعداد ۱ تا ۱۳۹۵ را دور دایره‌ای نوشته‌ایم. دستگاه پاک‌کننده‌ای داریم که ابتدا روی عدد ۱ قرار دارد. در هر مرحله با فرض این که دستگاه روی i اُمین عدد قرار دارد یکی از دو عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

- عدد $i + ۱$ اُمی را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i + ۲$ اُم می‌گذاریم.
- اعداد $i + ۱$ اُم و $i + ۲$ اُم را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i + ۳$ اُم می‌گذاریم.

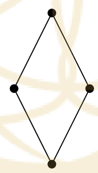
آن‌قدر این اعمال را انجام می‌دهیم تا تنها یک عدد دور دایره باقی بماند (توجه کنید اگر دو عدد باقی بماند، باید طبق روش اول یکی از اعداد را پاک کنیم). عدد نهایی که دور دایره باقی می‌ماند، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۳۹۵   ۲) ۶۹۷   ۳) ۱۳۹۳   ۴) ۱۳۹۴   ۵) ۱

فرض کنید G یک گراف باشد که روی هر یال آن یکی از دو عدد ۱ و ۱− نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یک رأس از گراف در نظر گرفت و عدد تمام یال‌های متصل به آن را قرینه کرد. کمینه‌ی تعداد یال‌های با عدد ۱− را که می‌توان با انجام تعدادی مرحله به آن رسید، $f(G)$ می‌نامیم. برای مثال در گراف زیر مقدار تابع f برابر ۰ است.



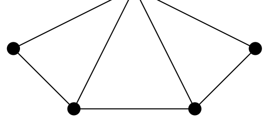
بیشینه‌ی مقدار $f(G)$ را به ازای تمام مقادیر اولیه‌ی ممکن برای یال‌ها، $h(G)$ در نظر می‌گیریم. برای مثال در گراف زیر مقدار h برابر ۱ است:



همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید، ورودی تابع f گرافی با یال‌های مقداردهی‌شده و ورودی تابع h گرافی با یال‌های مقداردهی‌نشده است.

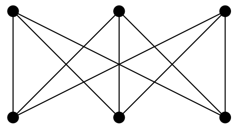
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:



۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۰   ۵) ۴

۱۷ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:



۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۳

۱۸ کدام گزاره‌های زیر درست هستند؟

- الف) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا کم‌تر نیست (به مجموعه‌ای از دورها، دورهای یال‌مجزا می‌گوییم اگر هر یال از گراف در حداکثر یکی از دورهای آن مجموعه آمده باشد).
- ب) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا بیش‌تر نیست.
- ج) فرض کنید G یک گراف با یک مقداردهی اولیه باشد که $f(G) = ۰$. اگر G دارای k مؤلفه باشد، دقیقن ۲^k روش وجود دارد که در آن هر رأس انتخاب شود یا نشود و در انتها عدد روی تمام یال‌ها ۱ شوند.

۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) الف ۴) ب و ج ۵) الف و ب و ج

فرض کنید G یک گراف ساده باشد. منظور از فاصله‌ی بین دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. منظور از قطر یک گراف، بیشینه‌ی فاصله‌ی دوبه‌دوی میان رأس‌هاست. توجه کنید در یک گراف ناهم‌بند، قطر گراف ∞ است. به یک گراف **قطر بحرانی** گوییم، اگر با حذف هر یال از آن، قطر گراف زیاد شود. هم‌چنین به یک گراف **قطر بحرانی معکوس** گوییم، اگر با اضافه کردن یال بین هر دو رأس غیر همسایه، قطر گراف کم شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ تعداد گراف‌های ۶ رأسی و ۶ یالی را بیابید که قطر بحرانی و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند. (دو گراف را یک‌ریخت می‌نامیم اگر بتوان با نام‌گذاری مجدّد رأس‌های اولی، گرافی برابر با گراف دومی ساخت)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۴

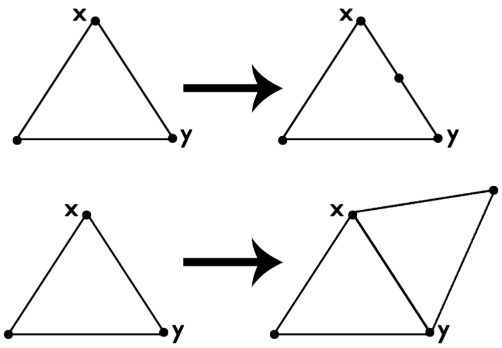
۲۰ تعداد گراف‌های هم‌بندِ غیرکامل ۷ رأسی را بیابید که قطر بحرانی معکوس و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند.

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰ ۵) ۷

محسن دستگاهی دارد که به عنوان ورودی یک گراف می‌گیرد و در خروجی گرافی دیگر به او می‌دهد! کارهایی که دستگاه او می‌تواند انجام دهد به شرح زیر است:

- ببین دو رأس مجاور انتخاب شده یک رأس اضافه کند.
- رأس جدیدی را به دو رأس مجاور انتخاب شده متصل نماید.

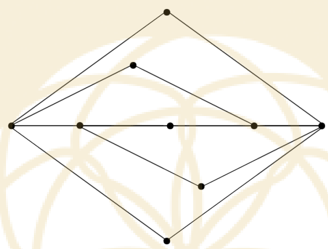
محسن یک بازی خطرناک با دستگاه خود شروع می‌کند. به این ترتیب که با یک گراف مثلث ($C_۳$) شروع می‌کند و هر بار گراف خود را به دستگاه می‌دهد و گراف خروجی را برای دور بعد در نظر می‌گیرد و هر موقعی که از بازی خسته شود، گراف‌ش را به عنوان نتیجه‌ی بازی اعلام می‌کند.



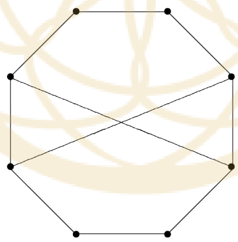
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۱ کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند نتیجه‌ی بازی محسن با دستگاه خود باشد؟

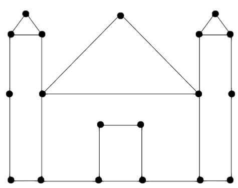
شکل الف)



شکل ب)



شکل ج)



۱) الف ۲) ب و ج ۳) الف و ج ۴) ج ۵) هیچ‌کدام

۲۲ **عدد هم‌بندی** یک گراف را حداقل تعداد رأس‌هایی در نظر می‌گیریم که باید از آن گراف حذف شود تا آن گراف

ناهم‌بند شود. (توجه کنید به طور قراردادی عدد هم‌بندی را برای یک گراف کامل n رأسی برابر $n - ۱$ در نظر می‌گیریم).
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد همبندی چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵ ۵) تا هر عددی می‌تواند زیاد شود

۲۳ گراف مسطح به گرافی می‌گوییم که بتوان آن را در صفحه کشید، بدون آن که یال‌هایش یک‌دیگر را قطع کنند. در این وضعیت، صفحه به **ناحیه**‌هایی تقسیم می‌شود. به غیر از ناحیه‌ی نامحدودی که اطراف گراف را در بر می‌گیرد، بقیه‌ی ناحیه‌ها را **محدود** می‌نامند. مثلن گراف شکل الف در سؤال قبل، دارای ۴ ناحیه‌ی محدود است. دو ناحیه با هم مجاورند اگر حداقل در یک یال با هم مرز مشترک داشته باشند.
عدد رنگی سطحی را برای گراف‌های مسطح، حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ کردن ناحیه‌های محدود گراف تعریف می‌کنیم؛ به طوری که هیچ دو ناحیه‌ی محدود مجاوری هم‌رنگ نباشند.
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد رنگی سطحی چند است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ممکن است گرافی نامسطح نتیجه‌ی این بازی خطرناک باشد ۴) ۵ ۵) ۳

اعضای تیم پلیس مخفی سلطان شامل پنج پلیس ماهر با شماره‌های ۱ تا ۵ است. این پنج نفر در آفتاب سوزان بندر دور یک میز گرد نشسته و هر کدام یک عینک آفتابی زده‌اند. عینک‌های آفتابی این افراد، یکی از سه رنگ قرمز، آبی و زرد را دارد. طبیعی است که این افراد، اجسام را به رنگ واقعی نمی‌بینند؛ بلکه ترکیب رنگ آن جسم با رنگ عینک خود را می‌بینند! برای مثال فردی که عینک زرد به چشم زده است، یک جسم آبی را به رنگ سبز و یک جسم زرد را به رنگ زرد می‌بیند. فرض کنید شیوه‌ی ترکیب رنگ اجسام با عینک‌ها مطابق جدول زیر است:

	قرمز	آبی	زرد
قرمز	قرمز	بنفش	نارنجی
آبی	بنفش	آبی	سبز
زرد	نارنجی	سبز	زرد

این قاعده برای عینک‌ها هم صادق است. پس برای مثال اگر پلیس A عینک قرمز و پلیس B عینک زرد داشته باشد، A با نگاه کردن به B تصوّر می‌کند رنگ عینک B نارنجی است!

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۴ سلطان که در کویری دور در حال انجام مأموریتی دیگر است، جویای احوال پلیس‌های خود می‌شود. هر یک از پلیس‌ها در گزارش خود، مجموعه‌ی رنگ‌هایی را که در میان عینک بقیه‌ی پلیس‌ها می‌بینند، می‌گوید. برای مثال فرض کنید پلیس‌ها به ترتیب عینک‌های قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد داشته باشند. پلیس شماره ۲ در پیام خود به سلطان می‌گوید:
«درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من در عینک‌های پلیس‌های دیگر، رنگ‌های قرمز، بنفش و نارنجی را می‌بینم.»
حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید که سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس، قرمز یا زرد یا آبی است. به ازای چند حالت از $۳^۵$ حالت

(برای رنگ عینک پلیس‌ها)، سلطان پس از دریافت گزارش‌ها به طور یک‌تا می‌تواند بفهمد رنگ عینک هر پلیس چیست؟

۱) ۲۱۳ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۸۳ ۴) ۱۵۰ ۵) ۱۵۳

۲۵ در نوع جدید پیام‌رسانی، هر پلیس، یک پلیس دیگر را انتخاب کرده و به سلطان پیام می‌دهد که رنگ عینک آن پلیس را چگونه می‌بیند. برای مثال فرض کنید رنگ عینک پلیس‌ها به ترتیب قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد باشد. پیام‌های پلیس‌ها می‌تواند به شکل زیر باشد:

- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۱ هستم. من عینک پلیس شماره ۵ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را قرمز می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۳ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را بنفش می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۴ هستم. من عینک پلیس شماره ۲ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۵ هستم. من عینک پلیس شماره ۴ را زرد می‌بینم.»

حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس قرمز یا زرد یا آبی است. $۳^۵$ حالت برای رنگ عینک پلیس‌ها و $۴^۵$ حالت برای این داریم که هر پلیس، رنگ عینک چه کسی را بفرستد. از این $۴^۵ \times ۳^۵$ حالت، در چند حالت سلطان به طور یک‌تا نمی‌تواند رنگ عینک پلیس‌ها را تشخیص دهد؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۸۸۴۰ ۳) ۱۳۶۸۰ ۴) ۰ ۵) ۱۷۷۶۰

مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

درخت ساده! .... **۱۷ امتیاز**

پیام یک درخت n رأسی دارد ($n \geq ۳$). او هر رأس این درخت را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده؛ طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ شده‌اند و هم‌چنین تعداد رأس‌های سفید بیش‌تر از تعداد رأس‌های سیاه شده است. حسام باید روی هر رأس سفید، یکی از اعداد $۱, ۰, -۱$ را بنویسد؛ طوری که عدد حداقل یک رأس سفید برابر ۰ نباشد. حسام باید طوری این کار را انجام دهد که به ازای هر رأس سیاه، مجموع اعداد هم‌سایه‌های آن برابر ۰ شود. برای مثال اگر درخت پیام به شکل (۱) باشد، حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۲) انجام دهد. ثابت کنید درخت پیام به هر شکلی که باشد، حسام قادر به انجام کارهای گفته شده، خواهد بود.

شکل (۲)   شکل (۱)

دست‌کش‌های مشکوک! .... **۲۲ امتیاز**

حسام یک دست‌کش آبی در دست راست و یک دست‌کش قرمز در دست چپ خود دارد. پیام و حسام یک عدد طبیعی n انتخاب می‌کنند ($n \geq ۲$)؛ سپس حسام یک عدد طبیعی k برمی‌گزینند که $۱ \leq k \leq n$ باشد و پیام باید k را بفهمد. در هر مرحله پیام می‌تواند یکی از دو پرسش زیر را از حسام بپرسد:

- دست‌کش دست راست تو چه رنگی است؟
- دست‌کش دست چپ تو چه رنگی است؟

حسام در هر پرسش، یکی از دو پاسخ «قرمز» یا «آبی» را می‌گوید. پرسش‌های پیام را به ترتیب با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, q$ شماره‌گذاری کنید. روش پاسخ‌گویی حسام به این صورت است که او پاسخ k پرسش نخست پیام را به طور دل‌خواه می‌دهد (دروغ یا راست)؛ سپس به ازای هر $i > k$، در پاسخ پرسش شماره‌ی i، پاسخ درست پرسش شماره‌ی $i-k$ را می‌دهد. توجه کنید پاسخ k پرسش نخست به صورت دل‌خواه داده می‌شود و حسام هیچ روش از پیش تعیین شده‌ای برای پاسخ‌گویی به آن ندارد.

توجه کنید پیام دست‌کش‌های حسام را می‌بیند و هم‌چنین از روش پاسخ‌گویی حسام آگاه است؛ امّا k را نمی‌داند و با توجه به پاسخ‌های حسام باید آن را بفهمد. کمینه‌ی تعداد پرسش‌هایی که پیام باید بپرسد تا به طور تضمینی k را بفهمد، چیست؟ پاسخ را بر حسب n بیابید.

پارکینگ‌های مشکوک! .... **۲۵ امتیاز**

آرمان در شرکت خود یک پارکینگ دارد که مدیریت آن را به پیام و حسام، واگذار کرده است. این پارکینگ دارای n جای‌گاه با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ است. شرکت نیز، n کارمند با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ دارد. می‌دانیم عدد n به صورت $۲^k + ۱$ است. هر روز این کارمندها طبق دستور حسام برای پارک کردن اتومبیل‌های‌شان طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنند:

> کارمندها به ترتیب شماره پارک می‌کنند؛ یعنی ابتدا کارمند شماره ۱، سپس کارمند شماره ۲ و ... و در انتها کارمند شماره n پارک می‌کند. کارمندهای بازار به طرز عجیبی تنّوع‌طلب و البته تنبل هستند! بنابراین هر کارمند در هنگام پارک کردن، مجموعه‌ی جای‌گاه‌های خالی را که تاکنون کم‌تر در آن‌ها رفته است، در نظر می‌گیرد و در میان آن‌ها جای‌گاهی را انتخاب می‌کند که کم‌ترین شماره را دارد.

برای مثال اگر $n = ۳$ باشد، کارمندان در سه روز نخست به ترتیب زیر در جای‌گاه‌ها پارک می‌کنند:

	جای‌گاه ۱	جای‌گاه ۲	جای‌گاه ۳
روز یکم	کارمند ۱	کارمند ۲	کارمند ۳
روز دوم	کارمند ۲	کارمند ۱	کارمند ۳
روز سوم	کارمند ۲	کارمند ۳	کارمند ۱

به روزهایی شماره‌ی تمام کارمندان با شماره‌ی جای‌گاه اتومبیل‌شان یک‌سان باشد، روزهای **منظّم** می‌گوییم! برای مثال روز یکم یک روز منظّم است. ثابت کنید بعد از روز یکم، نخستین باری که یک روز منظّم دیگر رخ می‌دهد، روز $n(n - ۱) + ۱$ است.

بازی قهرمانی! .... **۳۶ امتیاز**

فرهاد و علی‌رضا یک گراف کامل n رأسی دارند و با آن بازی می‌کنند. منظور از یک دور **همیلتونی** در گراف، یک دور به طول n است. در ابتدا علی‌رضا هر یال گراف را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس فرهاد تعدادی متناهی عمل **تعویض** انجام می‌دهد. هر عمل تعویض شامل انتخاب کردن یک دور همیلتونی از گراف و تغییر رنگ تمام یال‌های آن دور (از قرمز به آبی و بالعکس) است. توجه کنید تنها نقش علی‌رضا در بازی، رنگ‌آمیزی اولیه‌ی گراف

است. فرهاد در کمال هوشمندی می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف کمینه شود و علی‌رضا می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف بیشینه شود.

آ) اگر n فرد باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۱۵ امتیاز)

ب) اگر n زوج باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۲۱ امتیاز)

پاسخ را بر حسب n بیابید.

توجه: فرض کنید پاسخ به دست آمده توسط شما بر حسب n برابر A باشد. در هر یک از دو قسمت سوال، در صورتی که A نادرست باشد، امتیازی به شما تعلّق نمی‌گیرد. هم‌چنین در هر یک از دو قسمت سوال، باید دو مورد زیر را در مورد عدد به دست آمده اثبات کنید:

۱. علی‌رضا روشی برای رنگ‌آمیزی دارد که در انتها حداقل A یال آبی خواهیم داشت.

۲. فرهاد روشی دارد که به ازای هر رنگ‌آمیزی علی‌رضا، در انتها حداکثر A یال آبی خواهیم داشت.

در هر قسمت درستی A به تنهایی یک امتیاز و دو مورد بالا به ترتیب در قسمت (آ) ۵ و ۹ امتیاز و در قسمت (ب) ۷ و ۱۴ امتیاز دارند.