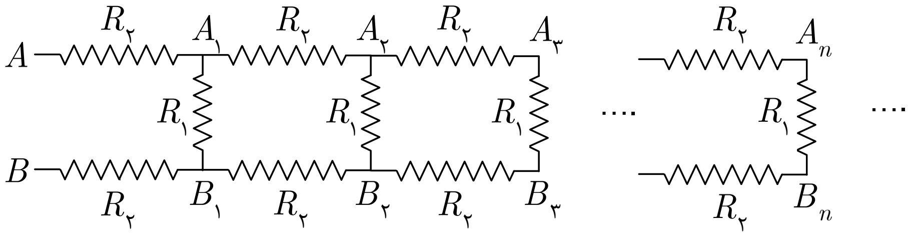
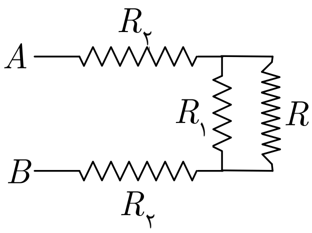
۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت‌های $R_2 - R_1 - R_2$ بین دو نقطهٔ A و B بی‌نهایت بار تکرار می‌شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی‌نهایت تکرار می‌شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی‌کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطهٔ A و B برابر R باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می‌شود.

آ) مقاومت R بین دو نقطهٔ A و B را برحسب R_1 و R_2 به‌دست آورید.

در بخش‌های زیر فرض کنید منبع ولتاژ V_0 را به دو سر A و B وصل کرده‌ایم.

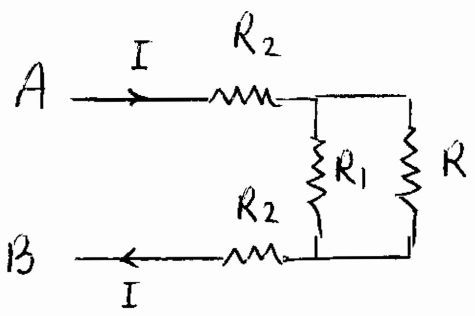
ب) ولتاژ V_1 بین A_1 و B_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0، R_2 و R چقدر است؟

پ) ولتاژ بین A_n و B_n روی دو سر nامین R_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0، R_2، R و n چقدر است؟

ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت‌های R_1 را با P_1 نشان می‌دهیم. P_1 را بر حسب V_0، R_1 و R_2 به دست آورید.

ث) با فرض آن که $x = \dfrac{R_1}{R_2}$ و $y = \dfrac{P_1}{P}$ که P توان کل مصرفی در مدار است، رابطهٔ y برحسب x را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

مسئله ۱)



آ)

$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1}$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$\boxed{R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \qquad (1)$$

ب)

$$I = \frac{V_0}{R} \quad , \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2 I$$

$$\boxed{V_1 = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)}$$

پ)

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2$$

$$\boxed{V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n}$$

ت) توان مصرفی در n امین R_1 را با $P_n^{(R_1)}$ نشان می‌دهیم

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

و مجموع توان مصرفی در همهٔ R_1 ها:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

$$= \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \qquad (2)$$

با قرار دادن R از معادله (۱) در (۲) و ساده کردن جواب:

$$\boxed{P_1 = \frac{V_0^2\left(R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}\right)}{2R_1\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}}$$

ث)

توان کل مصرفی در مدار

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

$$y = \frac{P_1}{P}$$

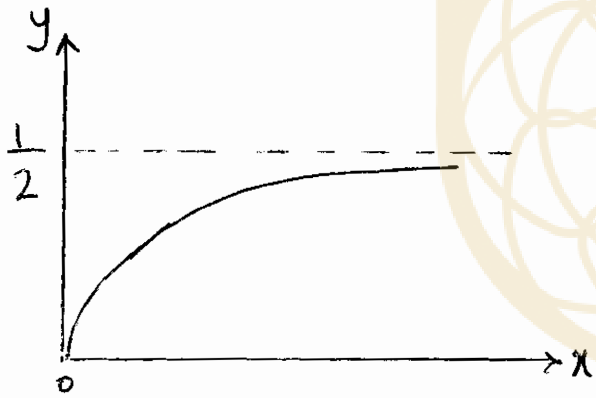
پس از ساده کردن y در معادله

به نتیجه زیر می رسیم

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}\right)$$

اگر $\frac{R_1}{R_2}$ را x بنامیم و $x = \frac{R_1}{R_2}$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)}$$



۲) در پدیدهٔ دوپلر اگر یک چشمهٔ صوتی متحرک با بسامد f_s با سرعت لحظه‌ای v_s حرکت کند، بسامد دریافت شده توسط یک گیرندهٔ ساکن $f = f_s \frac{u}{u \pm v_s}$ است که u سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود.

در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد f_s در لحظهٔ t' از چشمه منتشر شود، در لحظهٔ متفاوت t توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت v_s در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظهٔ t' است و f بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظهٔ t است.

حال فرض کنید یک چشمهٔ صوتی با بسامد f_s از ارتفاع h از سطح زمین در لحظه $t' = ۰$ از حال سکون رها شود. گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد $f(t)$ دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند. فرض کنید چشمه در زمان t' بعد از رها شدن، صوت با بسامد f_s منتشر می‌کند. شتاب گرانش را g بگیرید و از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

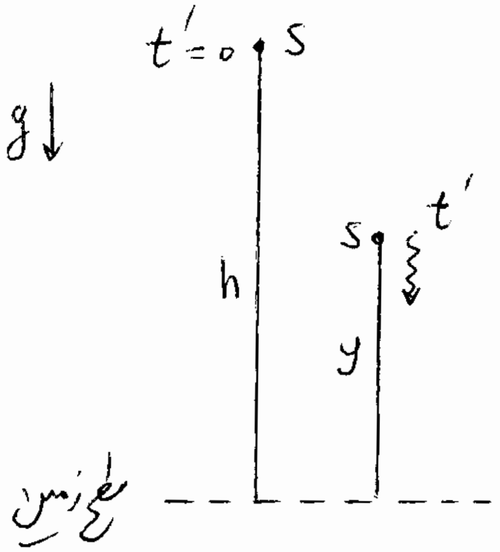
آ) زمان t' را بر حسب u، g، h و t به دست آورید.

ب) سرعت چشمه در زمان t' یعنی $v_s(t')$ را بر حسب u، g، h و t به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرندهٔ روی زمین در زمان t، یعنی $f(t)$ را بر حسب f_s، u، g، h و t به دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید $\frac{۱}{f^۲} = A + Bt$ و A و B را بر حسب f_s، u، g و h تعیین کنید.

مسئله ۲)



آ) چشمه در لحظه $t'=0$ در ارتفاع h از سطح زمین

و در لحظه t' در ارتفاع y از سطح زمین است

و سرعت آن v_s است

$$v_s = g t' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2} g t'^2$$

صوت در لحظه t' ارسال می‌شود و در لحظه t

به گیرنده روی زمین می‌رسد

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادله اخیر

$$g t'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$\boxed{t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}}$$

ب)

$$\boxed{v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

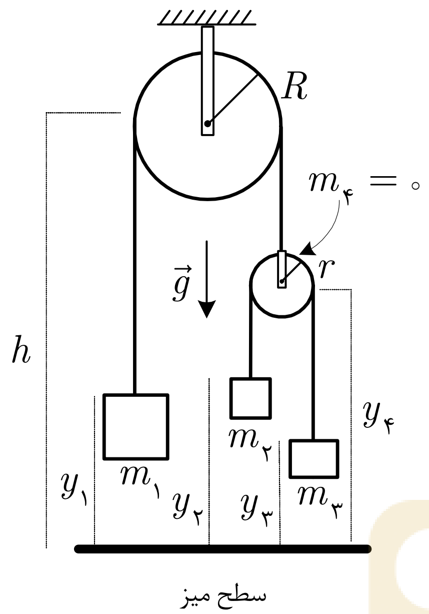
پ)

$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

$$\boxed{f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}}$$

ت) داریم $\frac{1}{f(t)^2} = \frac{1}{f_s^2}\left(1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u}\right)$ در نتیجه

$$\boxed{A = \frac{1}{f_s^2}\left(1 + \frac{2gh}{u^2}\right), \quad B = -\frac{2g}{u f_s^2}}$$



۳) سه جسم به جرم‌های m_1، m_2 و m_3 به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل‌اند. قرقرهٔ متحرک را جسم چهارم به جرم $m_4 = 0$ در نظر بگیرید. قرقرهٔ ثابت و نخ‌ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش g، شعاع قرقرهٔ ثابت R، شعاع قرقرهٔ متحرک r، طول نخ روی قرقرهٔ ثابت D و طول نخ روی قرقرهٔ متحرک d است. در لحظهٔ $t = 0$ در حالی که جرم‌ها در فواصل اولیهٔ y_{10}، y_{20}، y_{30} و y_{40} از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب a_1، a_2، a_3 و a_4 است.

آ) ارتفاع جرم‌ها از سطح میز در لحظهٔ دلخواه t را به ترتیب y_1، y_2، y_3 و y_4 بگیرید. D و d را بر حسب این کمیت‌ها، h فاصلهٔ مرکز قرقرهٔ ثابت از سطح میز، R و r بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آوردید، به ازای $i = 1, 2, 3, 4$، هر کدام از y_iها را بر حسب زمان، شتاب مربوطهٔ a_i و فاصلهٔ اولیه از سطح میز y_{i0} بنویسید.

پ) روابط قسمت ب را برای لحظهٔ $t = 0$ بنویسید و با ترکیب نتیجهٔ به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطهٔ مستقل بین شتاب‌ها به دست آورید.

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های m_1، m_2، m_3 و قرقرهٔ متحرک بنویسید و با استفاده از رابطهٔ بین شتاب‌ها که در قسمت پ به دست آوردید، کلیهٔ شتاب‌ها و کشش نخ‌ها را بر حسب جرم‌ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم m_2 چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟

ج) با فرض $y_{20} = y_{30}$، مدت زمانی که طول می‌کشد تا لبهٔ بالایی جسم m_2 هم‌تراز با پایین‌ترین نقطهٔ قرقره متحرک شود، چقدر است؟

مسئله ۳)

آ)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (h-y_1) + \pi R + (h-y_4) \\ d &= (y_4-y_2) + \pi r + (y_4-y_3) \end{aligned}}$$

ب)

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \left(h-\tfrac{1}{2}a_1t^2-y_{10}\right) + \pi R + \left(h-\tfrac{1}{2}a_4t^2-y_{40}\right) \\ d &= \left(\tfrac{1}{2}a_4t^2+y_{40}-\tfrac{1}{2}a_2t^2-y_{20}\right) + \pi r + \left(\tfrac{1}{2}a_4t^2+y_{40}-\tfrac{1}{2}a_3t^2-y_{30}\right) \end{aligned}}$$

پ) روابط قسمت آ) برای لحظهٔ $t=0$ نیز باید درست باشند یعنی

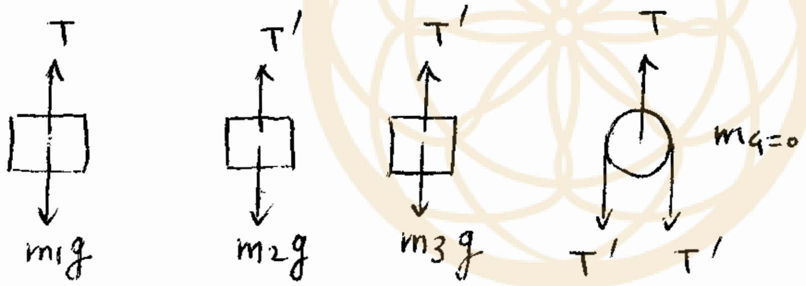
$$D = (h-y_{10}) + \pi R + (h-y_{40})$$

$$d = (y_{40}-y_{20}) + \pi r + (y_{40}-y_{30})$$

از مقایسه با روابط قسمت ب) باید

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a_1t^2-\frac{1}{2}a_4t^2=0 \\ a_4t^2-\frac{1}{2}a_2t^2-\frac{1}{2}a_3t^2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_1+a_4&=0 \\ 2a_4-a_2-a_3&=0 \end{aligned}} \Rightarrow -2a_1-a_2-a_3=0 \quad (1)$$

ت) نمودار جسم آزاد



$$T-m_1g=m_1a_1 \quad (2), \quad T'-m_2g=m_2a_2 \quad (3), \quad T'-m_3g=m_3a_3 \quad (4), \quad T-2T'-(0)g=(0)a_4 \Rightarrow T'=T/2$$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در $2m_2m_3$ ، m_1m_3 و m_1m_2 ضرب و سپس با هم جمع کنیم، با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2m_2m_3(T-m_1g) + m_1m_3\left(\frac{T}{2}-m_2g\right) + m_1m_2\left(\frac{T}{2}-m_3g\right) = 0$$

$$\boxed{T = \frac{8m_1m_2m_3g}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}, \quad T'=\frac{T}{2}}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲) و (۳) و (۴)؛

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\,g \\ a_2 &= \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\,g \\ a_3 &= \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\,g \end{aligned}}$$

، $a_4 = -a_1$

ث) برای اینکه $a_2 > 0$ باید

$$\boxed{\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}}$$

ج) وقتی $y_{20} = y_{30}$ ؛ $y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40}$

می‌خواهیم

$$y_2(t) = y_4(t) - r$$

$$\frac{1}{2}a_2t^2 + y_{20} = \frac{1}{2}a_4t^2 + y_{40} - r$$

در نتیجه

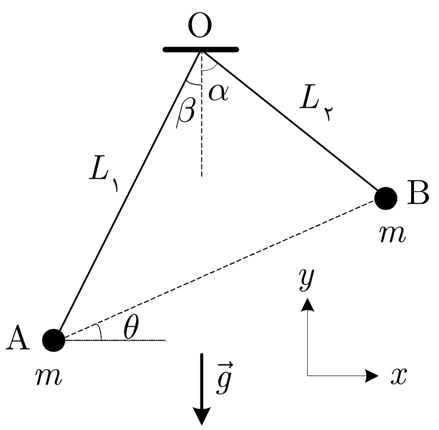
$$(a_2 - a_4)t^2 = d - r(2+\pi)$$

$$\frac{2(m_1m_3 - m_1m_2)\,g}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}\,t^2 = d - r(2+\pi)$$

که باید $m_3 > m_2$.

در نتیجه:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{d - r(2+\pi)}{2g}\;\frac{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}{m_1(m_3 - m_2)}}}$$



۴) دو گلولهٔ کوچک هر یک به جرم m دارای بار الکتریکی هم‌نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول‌های $L_۱$ و $L_۲$ متصل‌اند. دو انتهای دیگر نخ‌ها به تکیه‌گاهی واقع در نقطهٔ O بسته شده‌اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله‌ها به گونه‌ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعهٔ الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویهٔ α معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای هر یک از گلوله‌ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α، β، θ، اندازهٔ نیروی دافعهٔ کولنی F، mg و نیروی کشش نخ‌ها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ، $\tan\theta$ را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β به دست آورید.

پ) طول پاره خط AB را d بنامید. $d\sin\theta$ و $d\cos\theta$ را بر حسب $L_۱$، $L_۲$ و توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β بنویسید.

ت) زاویهٔ β را بر حسب $\frac{L_۲}{L_۱}$ و توابع مثلثاتی زاویهٔ α به دست آورید.

ث) نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها را بر حسب mg، $\frac{L_۲}{L_۱}$ و توابع مثلثاتی زاویهٔ α به دست آورید.

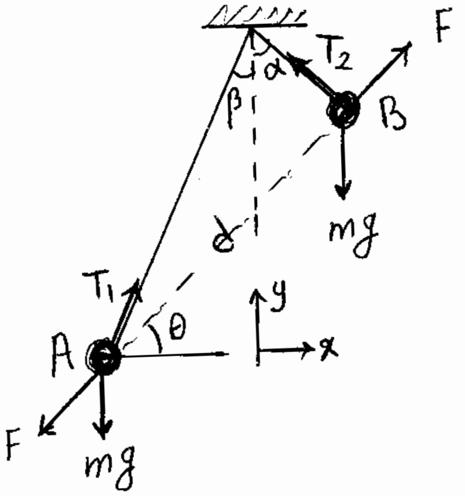
ج) به ازای $\frac{L_۲}{L_۱} = ۱$ نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها چقدر است؟

چ) فرض کنید طول نخ‌ها به اندازه‌ای است که $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ و $\beta = \frac{\pi}{۶}$ باشد. نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها و اندازهٔ نیروی دافعهٔ کولنی را بر حسب mg به دست آورید.

مسئله ۴)

آ)

برای جرم m سمت راستی



$$\begin{cases} x: & F\cos\theta - T_2\sin\alpha = 0 \quad (۱) \\ y: & F\sin\theta + T_2\cos\alpha - mg = 0 \quad (۲) \end{cases}$$

برای جرم m سمت چپی

$$\begin{cases} x: & -F\cos\theta + T_1\sin\beta = 0 \quad (۳) \\ y: & -F\sin\theta + T_1\cos\beta - mg = 0 \quad (۴) \end{cases}$$

ب) با قرار دادن T_2 از معادله (۱) در معادله (۲)

$$F(\sin\theta + \cos\theta\cot\alpha) = mg \quad (۵)$$

و با قرار دادن T_1 از معادله (۳) در معادله (۴)

$$F(-\sin\theta + \cos\theta\cot\beta) = mg \quad (۶)$$

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha)} \quad (۷)$$

پ)

$$\begin{cases} d\sin\theta = L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha \\ d\cos\theta = L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha \end{cases}$$

از تقسیم دو معادله

$$\tan\theta = \frac{L_1\cos\beta - L_2\cos\alpha}{L_1\sin\beta + L_2\sin\alpha} \quad (۸)$$

ت) از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$$\boxed{\sin\beta = \frac{L_2}{L_1}\sin\alpha} \quad (۹)$$

ث) با قرار دادن $\sin\beta$ از معادله (۹) در معادله (۷)

$$\tan\theta = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} - \cos\alpha\right) \qquad (۱۰)$$

با حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha + \cos\alpha} \qquad (۱۱)$$

و با حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan\theta\sin\alpha + \cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن (۱۰) در (۱۱)

$$\boxed{T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} + \cos\alpha}} \qquad (۱۳)$$

با قرار دادن (۱۰) در (12) و استفاده از معادله (۹)

$$\boxed{T_1 = \frac{2mg\left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2}\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\sin^2\alpha} + \cos\alpha}} \qquad (۱۴)$$

ج) به ازای $L_1 = L_2$

$$\boxed{T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

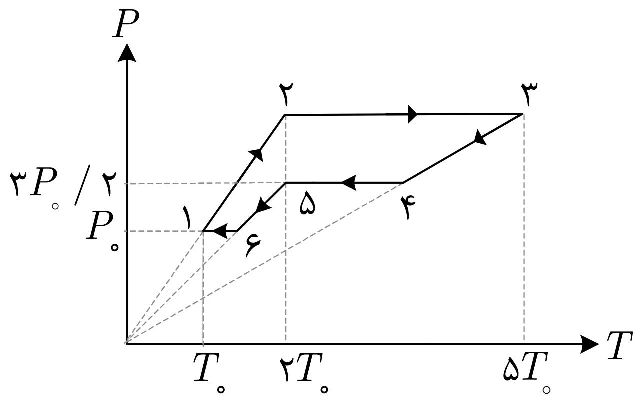
چ) به ازای $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواهیم داشت $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

با قرار دادن $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha} + \cos\alpha} = mg \quad و \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}\,mg}{\sqrt{3-\sin^2\alpha} + \cos\alpha} = \sqrt{3}\,mg$$

$$\boxed{F = T_2 = mg}$$

از معادله (۱۰) به دست می‌آید $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه



۵) چرخهٔ ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند n مول گاز کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های $T_\circ$ و $P_\circ$ معلوم‌اند. ثابت گازها R است. انرژی داخلی n مول گاز کامل تک‌اتمی با دمای T برابر $\frac{۳}{۲}nRT$ است.

آ) چرخه را در صفحهٔ $P-V$ رسم کنید و مختصات (P,V,T) نقاط متناظر با شش نقطهٔ نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

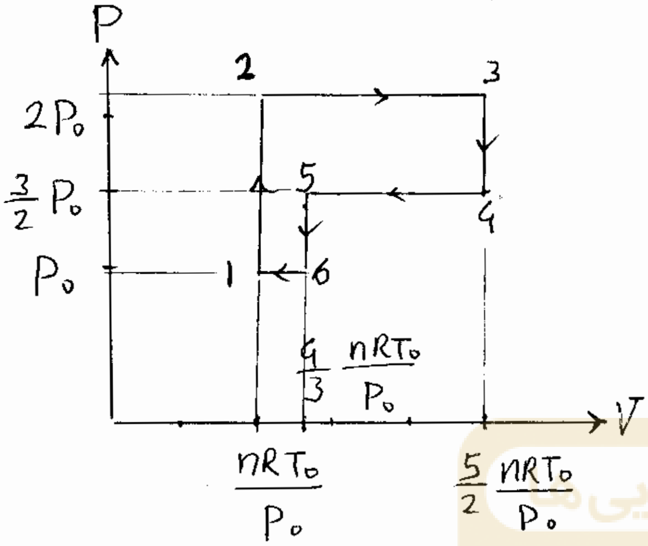
ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب n، R و $T_\circ$ به دست آورید. این کار مثبت است یا منفی؟

پ) در کدام یک از فرآیندهای ۱ → ۲، ۲ → ۳، ۳ → ۴، ۴ → ۵، ۵ → ۶ و ۶ → ۱ گاز از محیط گرما می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب n، R و $T_\circ$ به دست آورید.

ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

مسئله ۵)

آ) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P برحسب T شیب (ضریب زاویه)، $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط دارای شیب یکسان هم حجم هستند



نقطه (۱) $\left(P_0 ,\ \frac{nRT_0}{P_0} ,\ T_0\right)$

نقطه (۲) $\left(2P_0 ,\ \frac{nRT_0}{P_0} ,\ 2T_0\right)$

نقطه (۳) $\left(2P_0 ,\ \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} ,\ 5T_0\right)$

نقطه (۴) $\left(\frac{3}{2}P_0 ,\ \frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} ,\ \frac{15}{4}T_0\right)$

نقطه (۵) $\left(\frac{3}{2}P_0 ,\ \frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} ,\ 2T_0\right)$

نقطه (۶) $\left(P_0 ,\ \frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} ,\ \frac{4}{3}T_0\right)$

ب) کار چرخه منفی مساحت داخل چرخه، $|W|$، در صفحه $P-V$ است

$$|W|_{\text{چرخه}} = \left(\frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right)\frac{P_0}{2} + \left(\frac{4}{3}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right)\frac{P_0}{2}$$

$$\boxed{|W| = \frac{11}{12}nRT_0}$$

W چرخه منفی است.

پ) اگر Q گرمای داده شده به گاز در یک چرخه باشد

در فرآیندهای $1\to 2$ و $2\to 3$ گاز از محیط گرما می‌گیرد:

$$Q = Q_{1\to 2} + Q_{2\to 3}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_2 - U_1 = W_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$$

$$\frac{3}{2}nR(2T_0) - \frac{3}{2}nRT_0 = 0 + Q_{1\to 2} \Rightarrow Q_{1\to 2} = \frac{3}{2}nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2\to 3} + Q_{2\to 3}$$

$$\frac{3}{2}nR(5T_0) - \frac{3}{2}nR(2T_0) = -(2P_0)\left(\frac{5}{2}\frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0}\right) + Q_{2\to 3}$$

$$Q_{2\to 3} = \frac{15}{2}nRT_0$$

بنابراین

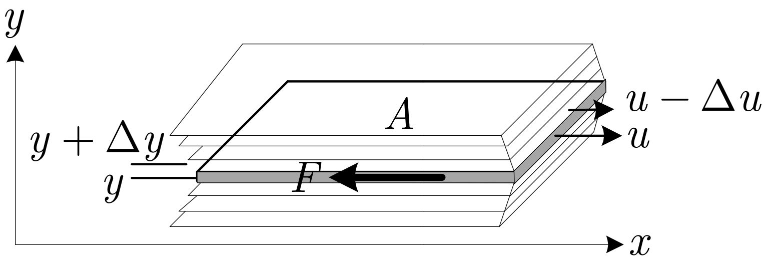
$$Q = \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{15}{2}nRT_0$$

$$\boxed{Q = 9nRT_0}$$

ت)

$$\text{بازده} = \frac{|W|_{\text{چرخه}}}{Q_{\text{گرمای داده شده}}} = \frac{11}{12}\cdot\frac{1}{9} \approx \%10$$

$$\boxed{\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \%10}$$



۶) گرانروی (Viscosity) خاصیتی از یک سیال است که باعث کندی حرکت اجسام نسبت به سیال می‌شود. سیال را به صورت لایه‌هایی با ضخامت ناچیز Δy در نظر بگیرید. اگر جسمی در راستای x با سرعت u در داخل یک سیال حرکت کند، لایه‌ای از سیال که در مجاورت آن است تقریباً همراه آن کشیده می‌شود. لایه‌های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانروی به حرکت در می‌آیند و هر چه در جهت عمود بر لایه‌های متحرک (راستای y در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن‌ها کمتر می‌شود. به بیان دیگر اگر Δu اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد، $\dfrac{\Delta u}{\Delta y}$ کمیتی مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با سیال A باشد نیروی اصطکاک F در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ $F=\eta A\left|\dfrac{\Delta u}{\Delta y}\right|$ به دست می‌آید. در این رابطه، η ضریب گرانروی نامیده می‌شود.

آ) واحد ضریب گرانروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت‌های اصلی بیان کنید.

اگر یک جسم کروی به شعاع r با سرعت u در داخل یک سیال گرانرو حرکت کند می‌توان نشان داد نیروی اصطکاک $F=۶\pi\eta ru$ به آن وارد می‌شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می‌شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانروی را می‌توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع r و چگالی ρ داخل سیالی به چگالی ρ' ($\rho>\rho'$) و ضریب گرانروی η سقوط می‌کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می‌رسد که به آن سرعت حد می‌گوییم. این سرعت را بر حسب ρ، ρ'، η، r و g به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطرهٔ کوچک کروی آب به قطر $۰/۴۰\,\mathrm{mm}$ را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره‌ای به قطر $۰/۱۲\,\mu\mathrm{m}$ و با چگالی نزدیک آب می‌گیریم، به دست آورید. به داده‌های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطرپاش به داخل محفظه‌ای که بین دو الکترود صفحه‌ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می‌کنند. کلیهٔ قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازهٔ زمانی ناچیزی به سرعت حد می‌رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می‌توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می‌توان از بیرون، حرکت یک قطرهٔ روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه‌گیری کرد.

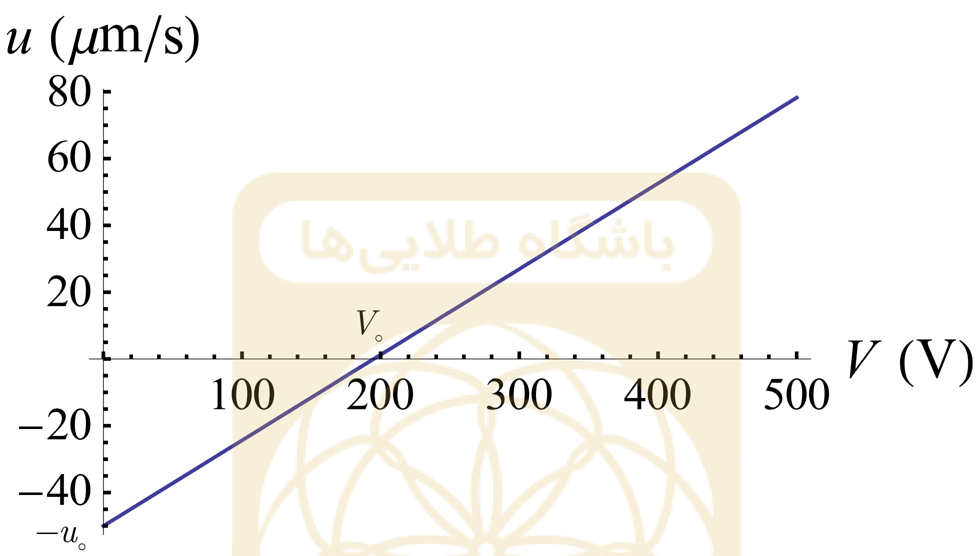
ت) در شکل زیر رابطهٔ خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحهٔ بالایی به اندازهٔ V از صفحهٔ پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا u مثبت و در حرکت به سمت پایین u منفی فرض شده است. اگر $V_۰$ و $-u_۰$ به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطهٔ خطی u بر حسب V باشد، شعاع قطرهٔ روغن و بار روی آن را بر حسب $u_۰$، $V_۰$، η (ضریب گرانروی هوا)، ρ_{a} (چگالی هوا)، ρ_{o} (چگالی روغن)، g (شتاب گرانش) و d (فاصلهٔ عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی $V_۰$ و $u_۰$ از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.

داده‌های عددی:

(روغن) $\rho_o = ۸۸۰\,\mathrm{kg/m^۳}$، (هوا) $\rho_a = ۱٫۲\,\mathrm{kg/m^۳}$ ، (آب) $\rho_w = ۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^۳}$،

$d = ۸٫۰\,\mathrm{mm}$، $g = ۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲}$، (در دستگاه SI) $\eta = ۱٫۸\times ۱۰^{-۵}$.



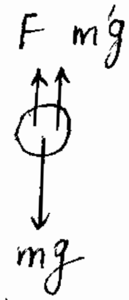
مسئله ۶)

آ)

$$\frac{F}{A} = \eta \left|\frac{\Delta u}{\Delta y}\right| \Rightarrow Pa = (\eta \text{ واحد}) \left(\frac{\frac{m}{s}}{m}\right)$$

$$\boxed{(\eta \text{ واحد}) = Pa \cdot s}$$

ب)



بعد از رسیدن به سرعت حد شتاب جسم صفر است، در نتیجه

$$F + m'g - mg = 0 \;(a)$$

$$6\pi r \eta u_{\text{حد}} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 0$$

F : نیروی اصطکاک

$m'g$: نیروی شناوری

mg : نیروی گرانش

$$\boxed{u_{\text{حد}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho')g}{\eta} r^2}$$

پ) برای قطره آب به شعاع $r = 0.2\,mm$ که در هوا سقوط می‌کند $\rho' = \rho_a$

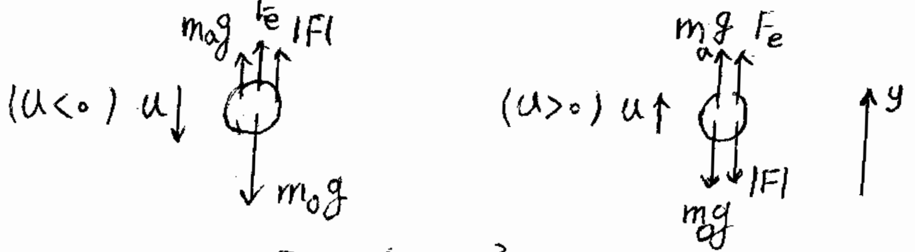
$$u_{\text{حد}} = \frac{2}{9}\frac{(\rho_w - \rho_a)g}{\eta} r^2 = \frac{2}{9}\frac{(1000 - 1.2)(9.8)}{1.8\times 10^{-5}}(2\times 10^{-4})^2$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = 4.8\ m/s}$$

برای ویروس کرونا به شعاع $r = 0.06\,\mu m$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = 0.44\ \mu m/s}$$

ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله
در حالت تعلیق که $u = 0$ است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید
به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را -191 می‌گیریم.



نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

در هر دو حالت:

$$191\frac{V}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g - 6\pi\eta r u_{\text{حد}} = 0$$

$$\boxed{u_{\text{حد}} = \frac{191}{6\pi\eta r}\frac{V}{d} - \frac{2}{9}\frac{(\rho_o - \rho_a)g}{\eta} r^2}$$

از آنجا که $\rho_a \ll \rho_o$ است از ρ_a در مقابل ρ_o چشم پوشی می‌کنیم. با توجه به نمودار:

به ازای $V=0$ داریم $u_{صعود} = -u_0$ ، در نتیجه

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta u_0}{\rho_o g}}}$$

به ازای $u_{سقوط} = 0$ داریم $V = V_0$ ، در نتیجه

$$|q| = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می‌آوریم:

$$\boxed{|q| = \frac{18\pi d}{V_0}\sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2\rho_o g}}}$$

ش) با توجه به نمودار $u_0 = 50\,\mu m/s$ و $V_0 = 195V$ ، در نتیجه:

$$r = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta u_0}{\rho_o g}} = 3\sqrt{\frac{(1.8\times10^{-5})(5\times10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3\times10^{-5})}{4\sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9\times10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44}\,\mu m \Rightarrow \boxed{r \approx 0.68\,\mu m}$$

$$|q| = \frac{6\pi\eta u_0 d}{V_0}r = \frac{(6)(3.14)(1.8\times10^{-5})(5\times10^{-5})(8\times10^{-3})(30\times10^{-6})}{(195)\times(44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65\times11}\times10^{-19}$$

$$= \left(\frac{54}{11}\right)\left(\frac{6.28}{6.5}\right)\times10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6)\times10^{-19}\,C = 4.8\times10^{-19}\,C$$

$$\boxed{|q| = 4.8\times10^{-19}\,C = 3e}$$