نام :

نام خانوادگی :

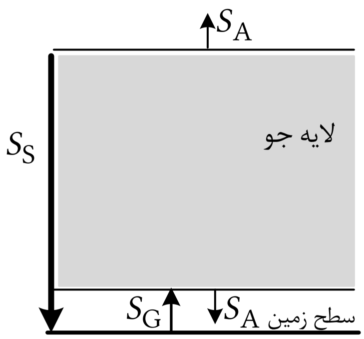
کد ملی :

۱) نیمی از جایزهٔ نوبل سال ۲۰۲۱ به پژوهشگرانی اهدا شد که اقلیم زمین را مدل‌سازی کرده بودند. چنین مدل‌هایی متغیرهای بسیاری دارد و به طور معمول به سبب پیچیدگی‌شان، حل آن‌ها نیازمند محاسبات و شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای است.

در این مسئله می‌خواهیم با مدلی بسیار ساده، پدیدهٔ گرمایش زمین بر اثر وجود لایه‌های جَو را بررسی کنیم. برای این که بتوانیم مدل را تحلیل کنیم، نیاز به ساده‌سازی‌های فراوانی داریم. برای مثال سطح وسیعی از زمین را اقیانوس‌ها پوشانده‌اند که تأثیر به سزایی در اقلیم دارند، اما در این مسئله اثر اقیانوس‌ها را کنار می‌گذاریم. همچنین اثر شب و روز را در نظر نمی‌گیریم. هر چند نتیجهٔ کمّیِ این مدلِ ساده با واقعیت تفاوت دارد، اما نقطهٔ شروع خوبی برای مدل‌های واقعی‌تر است.

مهم‌ترین منبع انرژی زمین، خورشید است. شدت نور خورشید در سطح زمین بر حسب بسامد متغیر است. کمیت شدت عبارت است از انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح می‌تابد. شدت متوسط نور خورشید در سطح زمین را با S_S نشان می‌دهیم. تابش خورشید به طور عمده در بسامدهایی صورت می‌گیرد که بدون جذب به طور کامل از تمامی لایه‌های جَو عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود.

شدت تابش گرمایی هر جسم در دمای T در محل جسم برابر با $S_\circ = kT^4$ است که در آن k ثابت است. در این مسئله ثابت k را برای زمین و لایه‌های جَو یکسان می‌گیریم. اگر زمین جَو نداشت، در دمای ثابت، یعنی در حالت تعادل گرمایی، شدت متوسط دریافتی توسط زمین از سوی خورشید، با شدت



شکل ۱

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام :

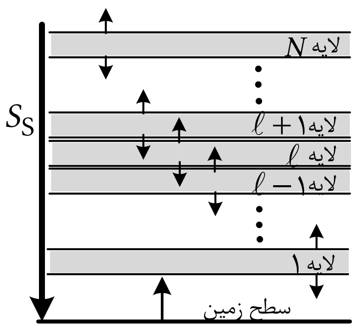
نام خانوادگی :

کد ملی :

تابشی زمین برابر بود. در این حالت دمای زمین را با T_{B} نشان می‌دهیم و داریم $S_S = kT_B^{۴}$. در هر جای مسئله که به شدت نور خورشید در سطح زمین احتیاج داشتید از این رابطه استفاده کنید.

آ) مطابق شکل ۱ جَوّ زمین را تک لایه‌ای فرض کنید. در این وضعیت دمای زمین را با T_{G} و دمای لایهٔ جَو را با T_{A} نشان می‌دهیم. این لایه با شدت یکسان $S_{\text{A}} = kT_A^{۴}$ هم به سمت زمین و هم به سمت فضا تابش دارد. همچنین فرض کنید تمام تابش لایه که به سمت زمین است توسط زمین جذب می‌شود و تمام تابش زمین نیز توسط لایهٔ جَو جذب می‌شود. با فرض تعادل گرمایی و ثابت بودن دمای زمین و لایه، T_{G} و T_{A} را بر حسب T_{B} به دست آورید.

حال فرض کنید که مطابق شکل ۲ جَوّ زمین از N لایهٔ مجزا تشکیل شده باشد. مانند قبل تمام نور خورشید بدون جذب شدن از همهٔ لایه‌ها عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط آن جذب می‌شود. این مجموعه در حال تعادل گرمایی است و دمای تمام اجزای آن ثابت است. دمای زمین را با T_{E} و دمای لایه‌ی ℓام را با T_ℓ نشان می‌دهیم. تابش گرمایی زمین به طور کامل توسط لایهٔ اول جذب می‌شود. تابش لایهٔ اول به سمت زمین به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود. لایهٔ نوعی ℓام با شدت یکسان $kT_\ell^{۴}$ به لایه‌های $\ell-۱$ و $\ell+۱$ تابش می‌کند که به طور کامل توسط آن‌ها جذب می‌شود. لایهٔ Nام نیز مشابه سایر لایه‌ها هم به سمت فضا و هم به سمت لایهٔ $N-۱$ تابش می‌کند.



شکل ۲

ب) معادله‌های تعادل گرمایی را برای زمین، لایهٔ ℓام ($۱ \le \ell < N$) و لایهٔ Nام بنویسید.

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پ) T_{N} را بر حسب T_{B} به دست آورید.

ت) T_ℓ را بر حسب T_{B}، N و ℓ به دست آورید.

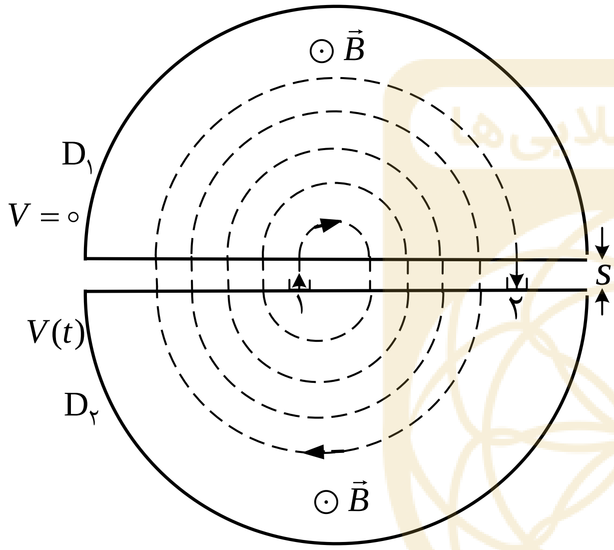
ث) T_{E} را بر حسب T_{B} و N به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

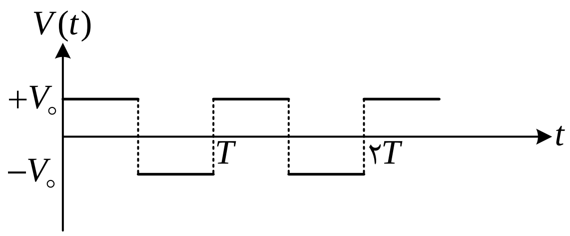
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

۲) آ) یک بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. صفحه دایره عمود بر امتداد B است. با به کار بردن قانون دوم نیوتن دورهٔ چرخش این حرکت دایره‌ای را بر حسب m ، q و B به دست آورید.



شکل ۱

حال می‌خواهیم فرایند شتاب دادن ذرات باردار در دستگاهی موسوم به سیکلوترون را در چارچوب فیزیک نیوتونی بررسی کنیم. شتاب‌دهندهٔ سیکلوترون دستگاهی مطابق شکل ۱ است که دارای دو رسانای نیم‌استوانه‌ای توخالی با مقطعی به شکل حرف انگلیسی D است. این دو رسانا را $D_۱$ و $D_۲$ می‌نامیم. فاصلهٔ قسمت تخت $D_۱$ و $D_۲$ از یکدیگر برابر S است. قسمت تخت هر دو آن‌ها به صورت توری است به طوری که یک ذرهٔ باردار می‌تواند از آن عبور کند. رسانای $D_۱$ همواره دارای پتانسیل الکتریکی صفر است و رسانای $D_۲$ به پتانسیل الکتریکی $V(t)$ مطابق نمودار شکل ۲ متصل است. این پتانسیل الکتریکی با دورهٔ تناوب T به صورت زیر است.



شکل ۲

$$V(t)=\begin{cases}+V_{\circ}, & nT<t<nT+\dfrac{T}{۲} \\ -V_{\circ}, & nT+\dfrac{T}{۲}<t<nT+T\end{cases}, \qquad n=\circ,۱,۲,۳,\ldots$$

به این ترتیب در شکاف بین $D_۱$ و $D_۲$، یعنی در فاصلهٔ s، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که به طور متناوب جهت آن معکوس می‌شود، اما داخل Dها میدان الکتریکی صفر است. هم‌چنین مطابق شکل ۱ میدان مغناطیسی برون‌سوی B عمود بر سطح مقطع Dها وجود دارد. در این شتاب‌دهنده ابتدا ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی مثبت q از نقطهٔ ۱ روی $D_۲$ در لحظهٔ $t=\circ$ از حالت سکون به دلیل پتانسیل الکتریکی $+V_{\circ}$ شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت $D_۱$ برسد. این ذره داخل $D_۱$ می‌رود و بر اثر میدان مغناطیسی داخل آن می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت $D_۱$ برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی $D_۲$ برابر $-V_{\circ}$ شده است و ذرهٔ خارج شده از $D_۱$ مجدداً شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت $D_۲$ برسد و داخل آن برود. در داخل $D_۲$ ذره بر اثر میدان مغناطیسی می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت $D_۲$ برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی $D_۲$ دوباره $+V_{\circ}$ شده است و ذرهٔ خارج شده از $D_۲$ مجدداً به سمت $D_۱$ شتاب می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود (شکل ۱). با توجه به محدود بودن دفعات چرخش و اندازهٔ شکاف s، ذره همواره در شکاف بین Dها حرکت تندشونده دارد. اثر میدان مغناطیسی در شکاف بین دو رسانا را ناچیز بگیرید به طوری که مسیر حرکت ذره در شکاف بین Dها همواره عمود بر سطح تخت Dها است. توجه کنید که تغییر علامت پتانسیل تقریباً به طور لحظه‌ای صورت می‌گیرد و قبل و بعد از این لحظه سرعت ذره یکسان است. فرض کنید دورهٔ تناوب T در شکل ۲، برابر با دورهٔ چرخش ذرهٔ باردار بخش آ است.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ب) بعد از k بار عبور از شکافِ بین D ها، سرعت ذره را بر حسب k، m، q و $V_{\circ}$ به دست آورید.

پ) بعد از k بار عبور از شکافِ بین D ها، شعاع چرخش ذره در میدان مغناطیسی را بر حسب k، m، q، B و $V_{\circ}$ به دست آورید.

ت) فرض کنید بعد از k بار عبور از شکافِ بین D ها، مطابق شکل ۱، ذره به نقطهٔ ۲ روی $D_{۲}$ برسد. زمان رسیدن ذره به نقطهٔ ۲، t، را بر حسب k، m، q، B، $V_{\circ}$ و s به دست آورید.

ث) کل مسافتی که ذره در قسمت **ت** طی می‌کند، l، را بر حسب k، m، q، B، $V_{\circ}$ و s به دست آورید.

ج) حداکثر مقدار s چقدر باشد تا در تمام k بار عبور ذره از شکاف، حرکت تندشونده باشد؟

چ) با فرض $\frac{m}{q}=۱/۰۴\times۱۰^{-۸}\,\mathrm{kg/C}$، $V_{\circ}=۵۰/۰\,\mathrm{kV}$، $s=۲/۰۰\,\mathrm{mm}$، $q=۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{C}$ و $B=۱/۰۴\,\mathrm{T}$ اگر بخواهیم انرژی جنبشی ذره وقتی به نقطهٔ ۲ می‌رسد $۲۵/۰\,\mathrm{MeV}$ باشد، مقادیر k، t و l را به دست آورید. در این جا، برای kهای بزرگ از رابطهٔ تقریبی $\sum_{i=۱}^{k}\sqrt{i}\cong\frac{۲}{۳}\sqrt{k^{۳}}+\frac{۱}{۲}\sqrt{k}$ می‌توانید استفاده کنید.

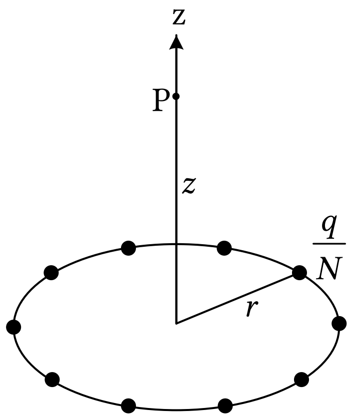
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۳) آ) بار الکتریکی q را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را مطابق شکل ۱ بر روی رئوس یک N ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است قرار داده‌ایم. محور تقارن دستگاه بر صفحهٔ دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد. مقدار و جهت میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع بر محور تقارن دستگاه و به فاصلهٔ z از مرکز دایره را به دست آورید. برای سهولت می‌توانید N را زوج فرض کنید.



شکل ۱

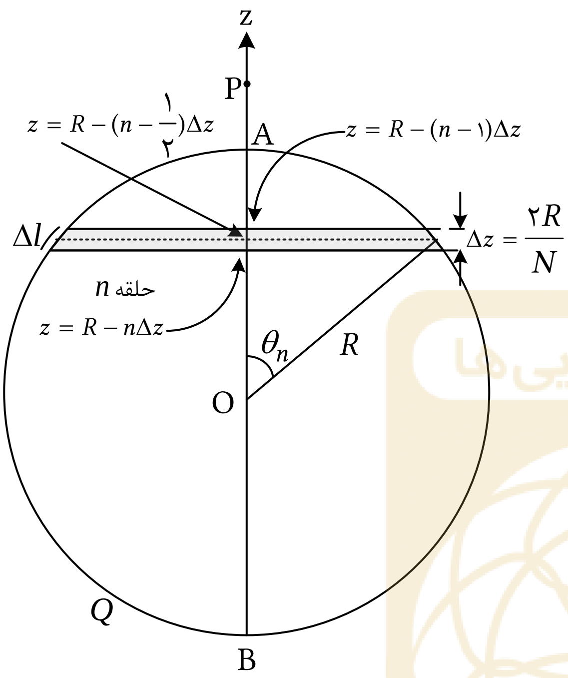
ب) حلقه‌ای به شعاع r در نظر بگیرید که بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. به کمک بخش **آ** میدان الکتریکی این حلقه را در نقطه‌ای به فاصلهٔ z از مرکز حلقه بر روی محور آن به دست آورید.

پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصلهٔ D از یک بار نقطه‌ای q نسبت به مبدأ دوردست برابر $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D}$ است. پتانسیل الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع جبری پتانسیل الکتریکی آن‌ها است.

پ) پتانسیل الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r و بار الکتریکی q در نقطه‌ای بر روی محور آن و به فاصلهٔ z از مرکز حلقه را به دست آورید.

مطابق شکل ۲، یک پوستهٔ کروی به شعاع R در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. نقطهٔ P واقع بر محور z و به فاصلهٔ d $(d>R)$ از مرکز کره است. مبدأ مختصات را در مرکز کره بگیرید. بازهٔ بین نقاط A به مختصهٔ $z=R$ و B به مختصهٔ $z=-R$ را به N قسمت مساوی تقسیم کنید.

از هر نقطهٔ تقسیم، صفحه‌ای فرضی عمود بر محور z در نظر بگیرید. فاصلهٔ هر دو صفحهٔ متوالی از هم $\Delta z = ۲R/N$ است. هر صفحه، کره را در یک دایره قطع می‌کند. در میان هر دو صفحهٔ فرضی متوالی باریکه‌ای از سطح کره قرار می‌گیرد. اگر N به اندازهٔ کافی بزرگ باشد هر کدام از باریکه‌های یاد شده مشابه حلقه بخش **ب** خواهد بود. حلقهٔ nام را بین صفحات $z = R-(n-۱)\Delta z$ و $z = R-n\Delta z$ در نظر بگیرید. مرکز حلقهٔ nام روی محور z در نقطهٔ $z = R-(n-\frac{۱}{۲})\Delta z$ است. زاویهٔ θ_n مربوط به حلقهٔ nام در شکل ۲ مشخص شده است.



شکل ۲

ت) کمیت $\cos\theta_n$ را بر حسب n و N به دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

ث) مساحت حلقهٔ nام و بار الکتریکی روی آن را به دست آورید.

راهنمایی: سطح هر حلقه را می‌توان تقریباً مشابه سطح نواری مستطیل شکل به عرض Δl در نظر گرفت.

ج) از برهم‌نهی میدان الکتریکی حلقه‌ها، میدان الکتریکی کره را در نقطهٔ P به صورت یک جمع روی شمارندهٔ n بر حسب Q، R، d و θ_nها به دست آورید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

چ) به روش مشابه، پتانسیل الکتریکی پوستهٔ کروی شکل ۲ در نقطهٔ P را به صورت یک جمع روی شمارندهٔ n بر حسب Q، R، d و θ_n ها به دست آورید.

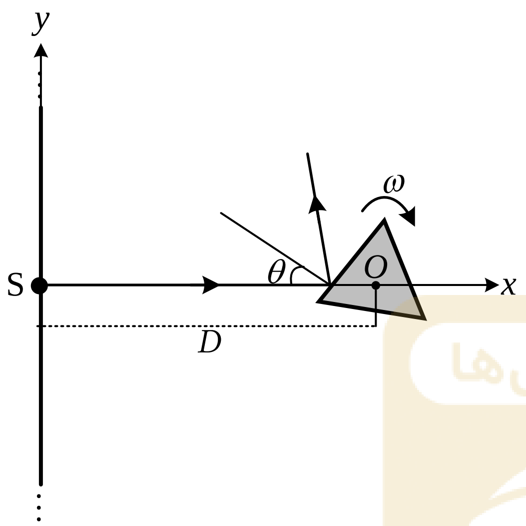
ح) فرض کنید پاسخ بخش‌های **ج** و **چ** برای میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر باشد،

$$E = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_۰ d^۲ N}\sum_{n=۱}^{N} f(x_n\ ,\ \alpha),\quad V = \frac{Q}{۴\pi\epsilon_۰ dN}\sum_{n=۱}^{N} g(x_n\ ,\ \alpha)$$

که در آن $\alpha = R/d$ و $x_n = \cos\theta_n$ فرض شده‌اند. توابع $f(x\ ,\ \alpha)$ و $g(x\ ,\ \alpha)$ را بنویسید. برای $\alpha = \frac{۱}{۳}$ شکل تقریبی این دو تابع را رسم کنید. برای این کار توجه کنید که مشتق اول و دوم هر دو تابع مثبت هستند. بنابراین کافی است مقدار توابع یاد شده را در ابتدا و انتهای بازهٔ مجاز و در $x = ۰$ به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۴) باریکه‌ای از نور مطابق شکل از چشمهٔ S در راستای محور x به سمت راست منتشر می‌شود. امتداد باریکه از نقطهٔ O مرکز یک N-ضلعی منتظم می‌گذرد. در شکل مقابل، حالت $N=۳$ نشان داده شده است. این N-ضلعی منتظم مقطعی از یک منشور با صفحهٔ شکل است که وجوه خارجی آن آینه است. آینه‌ها بر صفحهٔ شکل عمودند. منشور حول محوری که از نقطهٔ O گذشته و بر صفحهٔ شکل عمود است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به طور ساعتگرد می‌چرخد. باریکهٔ نور پس از بازتاب از آینه‌ای که در لحظهٔ معینی در مسیر آن است، به پرده‌ای نامتناهی که در پشت چشمه قرار دارد برخورد می‌کند و باعث ایجاد نقطه‌ای نورانی می‌شود. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که زاویهٔ نور بازتابیده با محور x مناسب باشد. در شکل، محور y مقطع پرده با صفحهٔ شکل است. زاویهٔ تابش نور به آینه در یک لحظهٔ نامشخص را θ بگیرید. فاصله SO را برابر D بگیرید که بسیار بزرگتر از ابعاد N-ضلعی است. فاصلهٔ چشمه از پرده را ناچیز بگیرید. در بخش‌های **آ** و **ب** این مسئله فرض کنید انتشار نور به طور آنی صورت می‌گیرد، یعنی سرعت انتشار آن نامتناهی است. طولی از محور y که توسط نقطهٔ روشن جاروب می‌شود را ΔL بگیرید و فرض کنید $f=\dfrac{\Delta L}{D}$. همچنین g را کسری از یک بازهٔ زمانی طولانی بگیرید که طی آن، یک نقطهٔ روشن روی پرده وجود دارد.

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

آ) کسرهای f و g را برای موارد ذکر شده در جدول زیر به دست آورید. در پاسخ‌نامهٔ خود جدولی مشابه این جدول بکشید و جواب‌های خود را در خانه‌های خالی آن پر کنید.

N	۳	۴	$N>۴$	۶
f				
g				

در ادامهٔ مسئله فرض کنید $N=۳$ است یعنی مقطع منشور مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ب) سرعت نقطهٔ روشن روی پرده را بر حسب θ به دست آورید. به ازای چه مقادیری از θ اندازهٔ سرعت نقطهٔ روشن از مقدار معین V بیشتر است؟

حال فرض کنید نور از ذراتی موسوم به فوتون تشکیل شده که با سرعت ثابت c منتشر می‌شوند. فوتون‌ها در برخورد با آینه از قانون بازتاب عمومی (برابری زوایای تابش و بازتاب) تبعیت می‌کنند. فرض کنید در لحظهٔ $t_m=\circ$ یکی از آینه‌ها بر خط SO عمود است و در لحظهٔ دلخواه t_m به اندازهٔ زاویهٔ $\theta=\omega t_m$ چرخیده است. فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد کرده در لحظهٔ t به پرده می‌رسد.

پ) t را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

ت) فوتونی که در لحظهٔ t_m به آینه برخورد می‌کند در نقطهٔ y به پرده می‌رسد. y را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

ث) سرعت نقطهٔ نورانی روی پرده، $v=\frac{dy}{dt}$، که به معنی مشتق y نسبت به t است، را با استفاده از قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

یادآوری قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد، مشتق f نسبت به s از رابطهٔ $\frac{df}{ds}=\frac{df}{du}\frac{du}{ds}$ به دست می‌آید. همچنین توجه داشته باشید که $\frac{du}{ds}=\left(\frac{ds}{du}\right)^{-۱}$.

ج) نمودار کمیت $z=\frac{۲\omega D}{v}$ را بر حسب $p=\sin ۲\theta$ رسم کنید. سپس نمودار $\frac{v}{c}$ را بر حسب p رسم کنید.

در محاسبات و رسم نمودارها، نسبت $\frac{\omega D}{c}$ را α بگیرید و فرض کنید $\frac{۱}{۲}<\alpha<۱$. بر روی نمودارها هر مشخصه‌ای از قبیل نقاط تقاطع با محورها، محل کمینه‌ها و بیشینه‌ها و مقدار آن‌ها، محل مجانب‌ها، بازه‌های معتبر حرکت و مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه‌های مذکور را مشخص کنید.

چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب p معلوم کنید در چه بازه‌ای از θ اندازهٔ سرعت نقطهٔ نورانی روی پرده از c بیشتر است؟

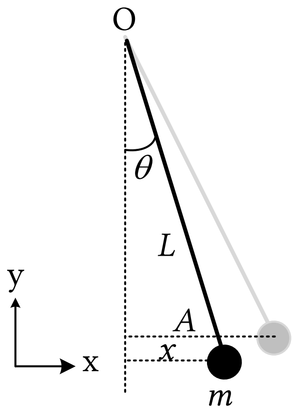
ح) اگر بازهٔ زمانی بسیار کوتاه بین ارسال دو فوتون متوالی از چشمه $T_۰$ فرض شود، بازهٔ زمانی بین رسیدن دو فوتون متوالی به پرده، T، را بر حسب $T_۰$ و θ به دست آورید. معلوم کنید T همواره از $T_۰$ بزرگتر است یا همواره از آن کوچکتر است و یا گاهی از آن بزرگتر و گاهی کوچکتر است؟

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



شکل ۱

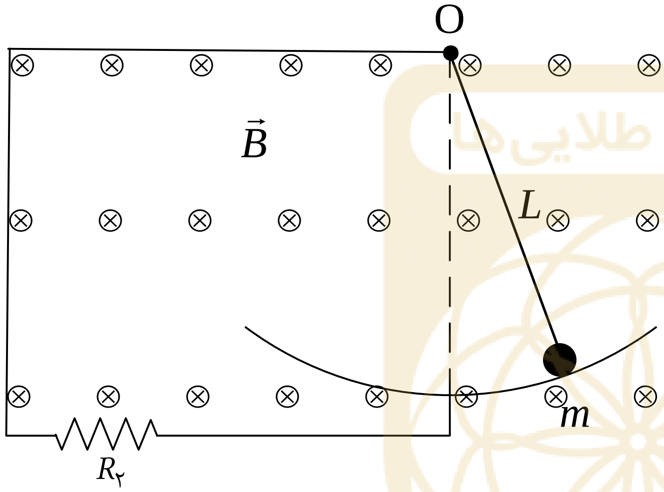
۵) گوی فلزی کوچکی به جرم m در انتهای یک میلهٔ فلزی نازک بسیار سبک به طول L قرار دارد. میله مطابق شکل ۱ از نقطهٔ O آویزان است و می‌تواند حول امتداد قائم نوسان کند. گوی فلزی را از حالت تعادل به اندازهٔ فاصلهٔ افقی A منحرف می‌کنیم و در زمان $t=۰$ آن را رها می‌کنیم. در تمام این مسئله زاویهٔ انحراف آونگ کوچک است به طوری که انحراف افقی گوی، x، با زاویهٔ انحراف θ رابطهٔ تقریبی $x \approx L\theta$ دارد.

آ) انرژی پتانسیل گرانشی آونگ، $U(x)$، را نسبت به پایین‌ترین نقطهٔ حرکت آن بر حسب x به دست آورید. با توجه به این که x از L بسیار کوچک‌تر است، با استفاده از رابطه $(۱+\varepsilon)^{\frac{۱}{۲}} \approx ۱+\frac{۱}{۲}\varepsilon$ که برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از یک، تقریب خوبی است، تابع انرژی پتانسیل گرانشی را به صورت $U(x)=\frac{۱}{۲}kx^۲$ به دست آورید و ضریب k را بر حسب داده‌های مسئله بنویسید.

ب) انرژی کل این دستگاه، $E=K+U$، ثابت است و با زمان تغییر نمی‌کند. مشتق این کمیت نسبت به زمان را حساب کنید و برابر صفر قرار دهید. از این طریق برای حرکت آونگ نسبت $\frac{a}{x}$ را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید که a شتاب افقی گوی و x جابه‌جایی آن از حالت تعادل است. سرعت لحظه‌ای افقی گوی را v بگیرید. لازم به ذکر است که در تمام این مسئله مؤلفهٔ قائم سرعت گوی قابل چشم‌پوشی است.

راهنمایی: برای محاسبهٔ مشتق کمیت‌های $x^۲$ و $v^۲$ **نسبت به زمان** از قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای استفاده کنید.

پ) برای حرکت نوسانی با معادلهٔ $x = A\cos(\omega t + \beta)$ نسبت $\frac{a}{x}$ را به دست آورید. از مقایسهٔ این نتیجه با نتیجهٔ بخش **ب** بسامد زاویه‌ای ω را برای حرکت آونگ حساب کنید. همچنین با توجه به شرایط اولیهٔ مسئله، β (فاز اولیه) را نیز تعیین کنید.



شکل ۲

حال دستگاه شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این دستگاه، آونگ شکل ۱ در یک مدار الکتریکی قرار داده شده است. گوی فلزی مماس بر سطح یک رسانای بدون مقاومت و بدون اصطکاک با مقطع دایره‌ای حرکت می‌کند و همواره اتصال مدار برقرار است. مقاومت الکتریکی میله و گوی را R_1 بگیرید و از مقاومت الکتریکی سیم‌ها چشم بپوشید. همچنین مدار دارای یک مصرف‌کننده با مقاومت R_2 است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود بر سطح مدار و به سمت داخل شکل برقرار است. لازم به ذکر است که در این حالت، گوی فلزی حرکت هماهنگ ساده ندارد.

ت) نیروی محرکهٔ الکتریکی القاء شده در مدار را بر حسب سرعت افقی گوی، v، و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

راهنمایی: برای زاویه‌های کوچک می‌توان کمان مقابل به زاویه را با وتر متناظر با آن یکی گرفت.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ث) انرژی این دستگاه به دلیل اتلاف در مقاومت‌ها ثابت نیست و با زمان کاهش می‌یابد. می‌دانیم اندازهٔ انرژی تلف‌شده در واحد زمان در مقاومت الکتریکی R برابر $Ri^۲$ است که i جریان لحظه‌ای گذرنده از مقاومت است. حال مشتق انرژی دستگاه نسبت به زمان را با منفی اندازهٔ آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌ها برابر بگیرید، و به معادله‌ای به صورت $ma+bv+kx=۰$ برسید که در آن a شتاب، v سرعت و x جابه‌جایی افقی گوی است. ضرایب b و k را معین کنید.

ج) جواب معادله‌ای که در بخش **ث** به دست آمد به صورت $x(t)=A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta)$ است. در این معادله از تابع نمایی $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ استفاده شده است که در آن e عدد نِپِر نام دارد و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار برابر ۲٫۷۲ است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d(\mathrm{e}^{-\gamma t})}{dt}=-\gamma\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ است. این حل را در معادلهٔ به دست آمده در بخش **ث** قرار دهید و کمیت‌های γ و ω' را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید.

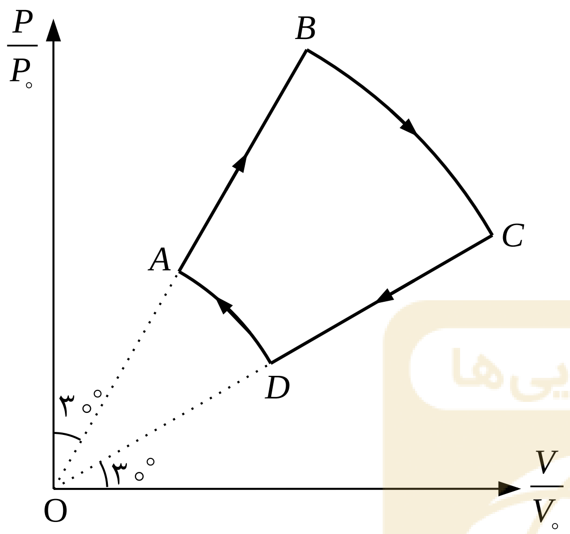
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



۶) n مول گاز کامل تک‌اتمی فرآیند ترمودینامیکی چرخهٔ شکل مقابل در صفحهٔ نمودار $P/P_\circ$ بر حسب $V/V_\circ$ را طی می‌کند که $P_\circ$ فشاری معین و $V_\circ$ حجمی معین است. فرآیندهای $\mathrm{B \to C}$ و $\mathrm{D \to A}$ به ترتیب کمانی از دایره‌های به شعاع ۲ و ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در این صفحه‌اند. مطابق شکل امتداد OC با محور افقی و امتداد OB با محور عمودی زاویهٔ ۳۰° می‌سازند. کمیت‌های خواسته شده را بر حسب n، R، $V_\circ$، $P_\circ$ و $T_\circ = \frac{P_\circ V_\circ}{nR}$ بنویسید و پاسخ‌های خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید. در ارائهٔ جواب‌های عددی، محاسبهٔ جذر اعداد ضروری نیست. لازم به ذکر است که انرژی داخلی n مول گاز کامل تک اتمی در دمای T برابر $\frac{۳}{۲}nRT$ است که R ثابت جهانی گازها است.

آ) مختصات ترمودینامیکی، (V,P,T)، هر یک از نقاط A ، B ، C و D را به دست آورید.

ب) کار محیط روی گاز در هر یک از فرآیندهای $\mathrm{A \to B}$ ، $\mathrm{B \to C}$ ، $\mathrm{C \to D}$ و $\mathrm{D \to A}$ را محاسبه و همراه با علامت آن بنویسید.

پ) کار محیط روی گاز در کل این چرخه چه‌قدر است؟

ت) گرمای خالص داده شده به گاز (گرمای داده شده به گاز منهای گرمای گرفته شده از گاز) در هر یک از فرآیندهای $\mathrm{A \to B}$ ، $\mathrm{B \to C}$ ، $\mathrm{C \to D}$ و $\mathrm{D \to A}$ را محاسبه کنید و همراه با علامت آن بنویسید.

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

ث) نقطه‌ای روی فرآیند $B \rightarrow C$ و نقطهٔ مشابهی روی فرآیند $D \rightarrow A$ وجود دارد که گرمای مبادله شده با محیط قبل و بعد آن تغییر علامت می‌دهد. مختصات ترمودینامیکی این نقاط را به دست آورید.

راهنمایی: به عنوان مثال در فرایند $B \rightarrow C$ اگر گرمای داده شده به گاز از نقطهٔ B تا نقطهٔ دلخواهی روی کمان BC را $Q(V)$ بگیریم، نقطهٔ مورد نظر جایی است که مشتق Q نسبت به V تغییر علامت دهد.

ج) گرمای داده شده به گاز از طرف محیط در این چرخه و گرمای گرفته شده از گاز در این چرخه را به دست آورید. در ارائه جواب می‌توانید از توابع معکوس مثلثاتی استفاده کنید. به عنوان مثال اگر $\tan\theta = c$ باشد می‌توان نوشت $\theta=\tan^{-1}c$ که θ بر حسب رادیان است.

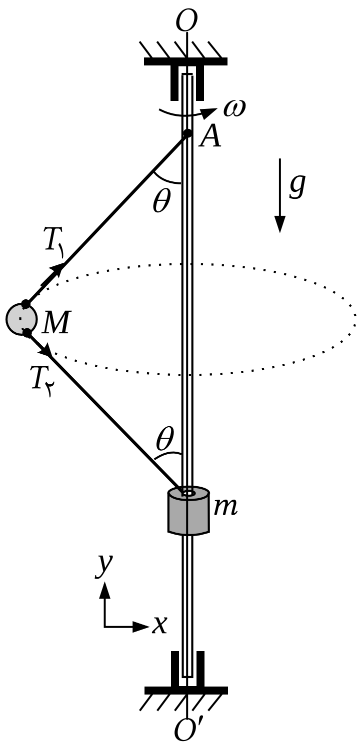
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :



شکل ۱

۷) مطابق شکل ۱ به مهره‌ای با جرم M دو ریسمان (نخ) یکسان هر یک به طول $\frac{l}{2}$ متصل شده است. انتهای یکی از ریسمان‌ها به نقطهٔ ثابت A از میله‌ای قائم و انتهای ریسمان دیگر به جرم m که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد، وصل شده‌اند. میلهٔ قائم به موتوری وصل است که آن را حول راستای OO′ می‌چرخاند. از جرم ریسمان‌ها و شعاع میله صرفنظر کنید. شتاب گرانش g است.

آ) در وضعیتی که مهره و ریسمان‌ها در صفحهٔ شکل هستند قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویهٔ θ، نیروهای کشش ریسمان‌ها (T_1 و T_2)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

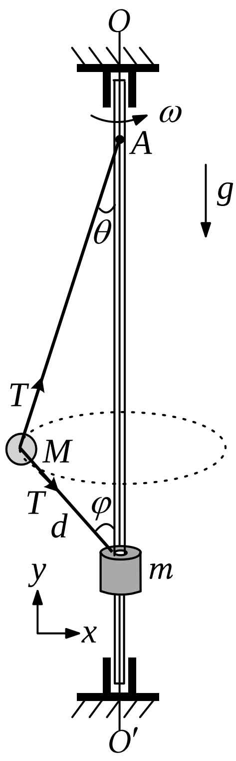
ب) یک جواب بدیهی برای این دستگاه $\theta = ۰$ است. اگر ω از مقدار کمینهٔ ω_{m} بزرگ‌تر باشد جواب دیگری نیز برای زاویه θ به دست می‌آید. ω_{m} را بر حسب m، M، l و g تعیین کنید.

پ) به ازای $\omega = ۲\omega_{\mathrm{m}}$ کشش ریسمان‌ها، $\cos\theta$ و شعاع دایرهٔ مسیر حرکت جرم M را به دست آورید.

اکنون مطابق شکل ۲، ریسمانی به طول l در نظر بگیرید که یک سرِ آن به نقطهٔ ثابت A روی میلهٔ قائم بسته شده و انتهای آن به وزنه‌ای به جرم m متصل است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد. ریسمان از داخل مهره‌ای به جرم M عبور داده شده و مهره نیز می‌تواند بدون اصطکاک در طول ریسمان حرکت کند. در این حالت نیز میلهٔ

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

قائم به موتوری وصل است که میله را حول راستای OO' می‌چرخاند. موتور با چنان سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد که در نتیجهٔ آن مهره بر روی یک مسیر دایره‌ای حول راستای قائم می‌چرخد. مطابق شکل ۲ زاویهٔ ریسمان‌ها با راستای قائم θ و φ و طول ریسمان واقع بین دو جرم d است. از جرم ریسمان و شعاع میله صرفنظر کنید. حرکت بدون اصطکاک مهره در طول ریسمان باعث می‌شود کشش در طول ریسمان یکسان باشد.



شکل ۲

ت) قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه‌های θ و φ، نیروی کشش ریسمان (T)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

در قسمت‌های بعدی مسئله فرض کنید $M = ۲m$.

ث) کمیت $\cos^۲\theta$ را بر حسب متغیر $u = \frac{d}{l}$ به دست آورید. (فرض کنید جواب در محدودهٔ قابل قبول است.)

ج) کمیت $\omega^۲$ را بر حسب u، l و g به دست آورید.

چ) به ازای $u = \frac{۱}{۴}$، سرعت زاویه‌ای، کشش ریسمان، $\cos\theta$، $\cos\varphi$ و شعاع دایرهٔ مسیر حرکت جرم $۲m$ را به دست آورید.

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ح) به ازای مقدار خاصی از u کمیت $\frac{l\omega^2}{g}$ کمینه می‌شود. این مقدار خاص u ریشهٔ حقیقی و مجاز یک معادلهٔ درجه چهار به صورت $u^4+c_3u^3+c_2u^2+c_1u+c_0=0$ است. مقدار عددی ضرایب c_0، c_1، c_2 و c_3 را به دست آورید. (حل این معادله لازم نیست.)

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

آ) برای این که دمای زمین T_G و دمای لایه T_A باقی بمانند باید

$$\begin{cases} S_S + S_A = S_G \\ 2S_A = S_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_B^4 + T_A^4 = T_G^4 \\ 2T_A^4 = T_G^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} T_A = T_B \\ T_G = 2^{\frac{1}{4}} T_A \end{matrix}$$

ب) برای لایه l ام: $S_{l+1} + S_{l-1} = 2S_l \quad , 1 \leqslant l < N$

برای لایه N ام: $S_{N-1} = 2S_N$

برای زمین: $S_S + S_1 = S_E$

پ) از معادلات قسمت ب) و این که $S_0 = S_E$ است:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{زمین} & S_S + S_1 = S_E \\ l=1: & S_2 + S_E = 2S_1 \\ l=2: & S_3 + S_1 = 2S_2 \\ & \vdots \\ l=N-1: & S_N + S_{N-2} = 2S_{N-1} \\ \text{لایه } N & S_{N-1} = 2S_N \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از جمع این معادلات}} \begin{matrix} S_S + S_N = 2S_N \\ \Downarrow \\ T_B^4 = T_N^4 \\ \Downarrow \\ T_N = T_B \end{matrix}$$

ت) از معادله لایه N: $T_{N-1}^4 = 2T_B^4$

از معادله لایه $l=N-1$: $T_{N-2}^4 = 3T_B^4$

تا رسیدن به معادله کامل l: $T_l^4 = (N-l+1)T_B^4$

$$T_l = (N-l+1)^{1/4} T_B$$

ث) $S_0 = S_E$ در نتیجه $T_E = (N+1)^{1/4} T_B$

آ)

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

ب) اگر $K_0 = 0$ انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ 1 روی D_2 باشد و K_1 انرژی جنبشی ذره پس از عبور از شکاف برای اولین بار باشد

$$\Delta K_1 = K_1 - K_0 = qV_0$$

پس از بار دوم

$$\Delta K_2 = K_2 - K_1 = qV_0$$

$$\vdots$$

و پس از بار kام

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = qV_0$$

از جمع معادلات فوق

$$K_k - K_0 = kqV_0$$

$$\frac{1}{2} m v_k^2 - 0 = kqV_0 \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}$$

پ) مشابه با قسمت آ):

$$r_k = \frac{mv_k}{qB}$$

$$r_k = \sqrt{\frac{2k V_0 m}{qB^2}}$$

ت) اگر $v_0 = 0$ سرعت ذره هنگام ترک نقطهٔ 1 باشد، سرعت ذره، v_1،

پس از اولین عبور از شکاف برابر است با

$$v_1 = at_1 + v_0$$

اندازه سرعت ذره هنگام طی مسیر نیم دایره‌ای در میدان مغناطیسی ثابت می‌ماند.

پس از دومین عبور ذره از شکاف:

$$v_2 = at_2 + v_1$$

$$\vdots$$

و پس از kام عبور ذره از شکاف:

$$v_k = at_k + v_{k-1}$$

از جمع طرفین معادلات:

$$v_k = a(t_1 + t_2 + \cdots + t_k) + v_0$$

بنابراین مجموع زمان‌هایی که ذره بین شکاف‌ها سپری می‌کند

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_k = \frac{v_k}{a}$$

که a برابر است با $a=\frac{qV_0}{ms}$ زیرا $ma=qE=\frac{qV_0}{s}$.

در نتیجه

$$t_1+t_2+\dots+t_k=\sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}\Big/\frac{qV_0}{ms}$$

شبیه به قسمت ت) زمان طی مسیرهای نیم دایره هم با هم برابراند. تا رسیدن ذره به نقطهٔ 2 ، $k-1$ بار مسیر نیم دایره‌ای طی شده است.

سرانجام زمان کل برابر است با

$$t=t_1+t_2+\dots+t_k+(k-1)\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{2mk}{qV_0}}\,s+(k-1)\frac{m\pi}{qB}$$

ث)

$$l=ks+\sum_{i=1}^{k-1}\pi r_i=ks+\pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}\sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{i}$$

$$l\simeq ks+\pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(k-1)^3}+\frac{1}{2}\sqrt{k-1}\right)$$

$$l\simeq ks+\pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}\sqrt{k-1}\left(\frac{2}{3}k-\frac{1}{6}\right)$$

ج) با توجه به این که بعد از زمان $\frac{T}{2}$ پتانسیل الکتریکی D_2 معکوس می‌شود و این که بار q مثبت است ، حرکت در صورتی تند شونده است که پتانسیل D_2 قبل از ورود ذره از D_1 به D_2 منفی و قبل از خروج ذره از D_2 به D_1 مثبت باشد. اگر این فرآیند برعکس شود حرکت ذره بین شکاف‌ها کند شونده می‌شود. یعنی مجموع زمان‌هایی که ذره بین D ها می‌گذراند از $\frac{T}{2}$ کمتر باشد

$$t_1+t_2+\dots+t_k<\frac{T}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{2mk}{qV_0}}\,s<\frac{T}{2}\Rightarrow s<\sqrt{\frac{mV_0}{2kq}}\,\frac{\pi}{B}$$

چ)

$$k=\frac{\frac{1}{2}mv_k^2}{qV_0}=\frac{25\times10^6\times1.6\times10^{-19}\,J}{1.6\times10^{-19}\times50\times10^3\,J}=500$$

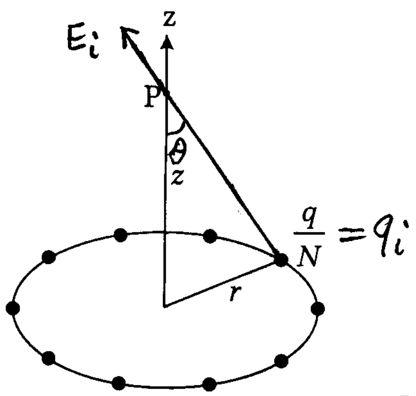
از نتیجهٔ قسمت ت) :

$$t=1.57\times10^{-5}\,s$$

از نتیجه قسمت ث) :

$$l=726\,m$$

۳ آ)



شکل ۱

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{z^2+r^2}$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \cos\theta = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{z^2+r^2}\,\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

ا ل $\sum_{i=1}^{N} q_i = N\left(\frac{q}{N}\right) = q$ ، بنابراین $E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$.

ب) این بار $q_i = \lim_{N\to\infty} \frac{q}{N}$ ، از طرفی بازهم $\sum_{i=1}^{N\to\infty} q_i = q$

در نتیجه

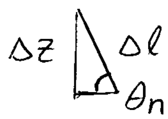
$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$$

پ) $V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$ ، $q_i = \frac{q}{N}$

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$$

ت) $\cos\theta_n = \frac{R - n\Delta z + \frac{1}{2}\Delta z}{R} = 1 + \left(-n+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{N} = 1 - \frac{2n-1}{N}$

ث) $\Delta S = (2\pi R\sin\theta_n)\Delta l$ و $\Delta l = \frac{\Delta z}{\sin\theta_n}$



$$= 2\pi R\,\Delta z = 2\pi R\left(\frac{2R}{N}\right) = \frac{4\pi R^2}{N}$$

سطح همه حلقه‌ها برابر و $\frac{1}{N}$ مساحت کره است.

$$\Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2}\Delta S = \frac{Q}{N}$$

ج) در قسمت ب) برای حلقه‌ای با بار ΔQ به فاصله‌ی $z_n = d - R\cos\theta_n$ از نقطه‌ی P و به شعاع $r_n = R\sin\theta_n$ به دست آوردیم

$$E_n = \frac{\Delta Q\, z_n}{4\pi\epsilon_0 (z_n^2 + r_n^2)^{3/2}}$$

$$E=\sum_{n=1}^{N} E_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\frac{d-R\cos\theta_n}{\left[(d-R\cos\theta_n)^2+(R\sin\theta_n)^2\right]^{3/2}}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{d-R\cos\theta_n}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta_n)^{3/2}}$$

ج) در قسمت ب) برای حلقه‌ای با بار ΔQ به فاصله $z_n=d-R\cos\theta_n$ از نقطه P و به شعاع $r_n=R\sin\theta_n$ به دست آوردیم

$$V_n=\frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_n^2+r_n^2}}\quad,\quad V=\sum_{n=1}^{N} V_n$$

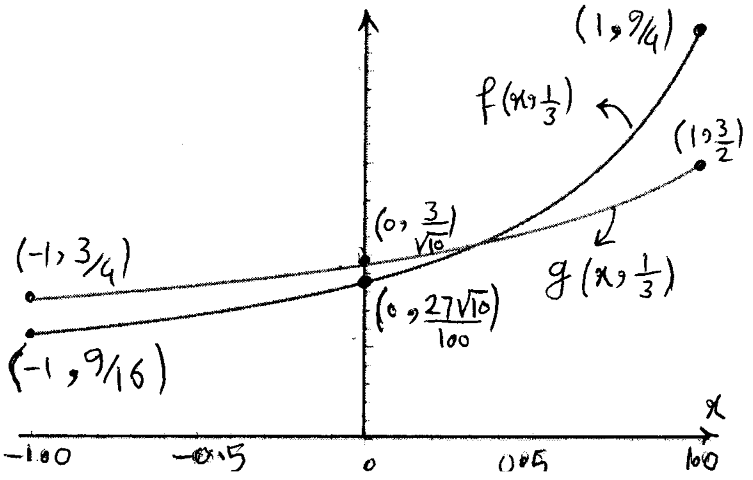
$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta_n)^{1/2}}$$

د)

$$f(x_n,\alpha)=\frac{1-\alpha x_n}{(1+\alpha^2-2\alpha x_n)^{3/2}}\quad,\quad f(x,\alpha)=\frac{1-\alpha x}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{3/2}}$$

$$g(x_n,\alpha)=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha x_n)^{\frac{1}{2}}}\quad,\quad g(x,\alpha)=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{1/2}}$$

$$f\left(x,\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1-\frac{x}{3}}{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}x\right)^{3/2}}\qquad g\left(x,\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1}{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}x\right)^{1/2}}$$



۴

آ) اگر مطابق شکل، θ را از محور x بسنجیم، در صورتی امکان برخورد نور بازتابی به پرده y وجود دارد که $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ باشد.

به ازای $N=3$، شروع انعکاس از یک آینه معین در $\theta=-\frac{\pi}{3}$ است. از مقایسه این بازه با بازهٔ $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ کسر $g=\frac{90^\circ}{120^\circ}=\frac{3}{4}$ به دست می‌آید. در این حالت ΔL کل محور y را در بر می‌گیرد و $f\to\infty$

به ازای $N=4$ بازه‌ای که نور پس از انعکاس به پرده می‌خورد همان $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ است پس $g=\frac{90^\circ}{90^\circ}=1$. در این وضعیت نیز کل محور y به وسیله نقطهٔ روشن جاروب می‌شود و $f\to\infty$.

برای منشوری که سطح مقطع آن N ضلعی منتظم است داریم: $-\frac{\pi}{N}<\theta<\frac{\pi}{N}$.
در این وضعیت $g=1$ است. در هر یک از دو حالت حدی $\theta=\pm\frac{\pi}{N}$ زاویهٔ پرتو بازتاب با محور x، $\pm\frac{2\pi}{N}$ است، بنابراین $\Delta L=2D\tan\frac{2\pi}{N}$ و $f=2\tan\frac{2\pi}{N}$.

به ازای $N=6$، $g=1$ و $f=2\tan\frac{2\pi}{6}=2\sqrt{3}$

N	۳	۴	N > ۴	۶
f	∞	∞	$2\tan\frac{2\pi}{N}$	$2\sqrt{3}$
g	$\frac{3}{4}$	1	1	1

ب)

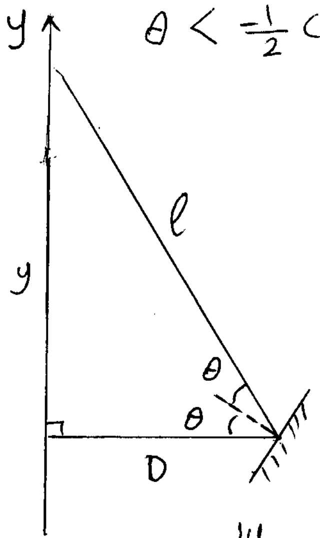
$$y = D\tan 2\theta = D\tan 2\omega t$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\omega D\left(1+\tan^2 2\omega t\right) = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t} = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\theta}$$

به ازای $v > V$ باید $|\cos 2\theta| < \sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$

$$\Downarrow$$

$\theta < -\frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$ یا $\theta > \frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$



پ)

$t = t_m + \frac{l}{c}$ و $l = \frac{D}{\cos 2\theta}$

$$t = t_m + \frac{D}{c}\,\frac{1}{\cos 2\omega t_m}$$

ت)

$$y = D\tan 2\theta = D\tan 2\omega t_m$$

ث)

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_m}\left(\frac{dt}{dt_m}\right)^{-1}$$

$$v = 2\omega D\left(\frac{1}{\cos^2 2\omega t_m}\right)\left(1+\frac{D}{c}\,\frac{2\omega\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m}\right)^{-1}$$

$$v = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t_m + \frac{2\omega D}{c}\sin 2\omega t_m}$$

ج)

$\alpha = \frac{\omega D}{c}$, $\theta = \omega t_m \Rightarrow \sin 2\theta = p$, $\cos^2 2\theta = 1-p^2$

$$\frac{v}{c} = \frac{2\alpha}{1-p^2+2\alpha p} \quad , \quad \frac{2\omega D}{v} = 1-p^2+2\alpha p$$

به ازای $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \sin 2\theta < 1 \Rightarrow -1 < p < 1$

اگر $r(p)$ و $q(p)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$r(p) = 1-p^2+2\alpha p$

$\frac{dr}{dp} = 0 \Rightarrow p = \alpha \Rightarrow r(\alpha) = 1+\alpha^2$

$r(p) = 0 \Rightarrow p_0 = \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}$

$r(-1) = -2\alpha$

$r(1) = 2\alpha$

$r(0) = 1$

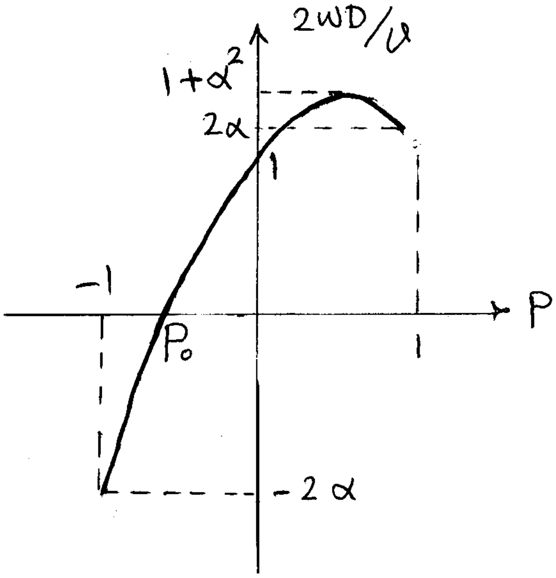
$q(p) = \frac{2\alpha}{1-p^2+2\alpha p}$

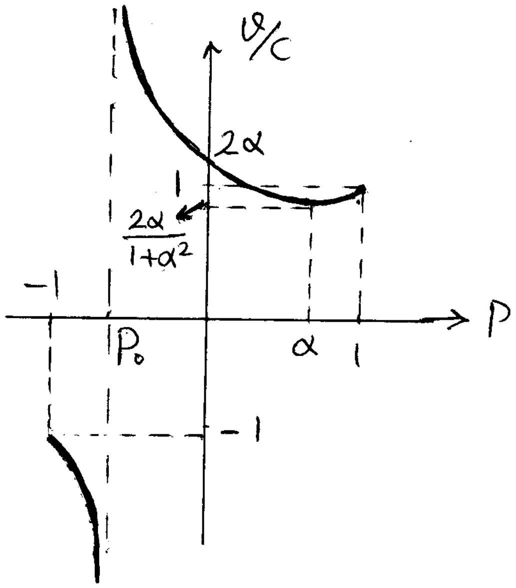
$\frac{dq}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{4\alpha(p-\alpha)}{(1-p^2+2\alpha p)^2} = 0 \Rightarrow p = \alpha$

$q(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ و $q(-1) = -1$ و $q(1) = 1$

$q(0) = 2\alpha$

مجانب $\frac{v}{c} \to \pm\infty \Rightarrow p_0 = \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}$





ج) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ برحسب P مشخص است که برای کلیه P های منفی و P های مثبتی که $P<P_1$ است اندازه سرعت از c بیشتر است که P_1 برابر است با

$$\frac{v}{c}=1 \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-P_1^2+2\alpha P_1}=1 \Rightarrow P_1=\begin{cases}1\\ 2\alpha-1 & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

یعنی به ازای $-1<P<2\alpha-1$ داریم $\frac{v}{c}>1$. برحسب θ خواهد شد:

$$-1<\sin 2\theta<2\alpha-1 \quad \text{که} \quad \frac{1}{2}<\alpha<1$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{1}{2}\sin^{-1}(2\alpha-1)$$

د) با توجه به مفهوم مشتق:

$$dt=\left(\frac{dt}{dt_m}\right)dt_m$$

$$T=\left(1+\frac{2\omega D}{c}\,\frac{\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m}\right)T_0$$

همواره $T>T_0$ است.

۵ (آ

$$U(x) = mg\left(L - \sqrt{L^2 - x^2}\right)$$

$$\sqrt{L^2 - x^2} = L\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx L\left(1 - \frac{x^2}{2L^2}\right)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} m\left(\frac{g}{L}\right) x^2 \quad \Rightarrow k = mg/L$$

ب)

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad v \approx v_x \quad \text{و} \quad v \approx$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m v a + k x v = 0 \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{-k}{m} = -\frac{g}{L}$$

پ)

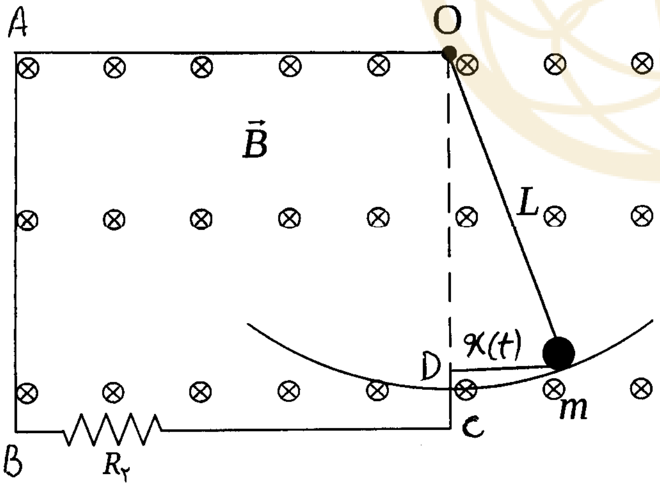
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \beta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \beta) = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{a}{x} = -\omega^2$$

از مقایسه با قسمت ب) $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

در $t=0$ داریم $v=0$ و $x=A$ بنابراین

$$0 = -A\omega \sin\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = A\cos\omega t \quad \text{یا} \quad x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)$$



ت) در وضعیت نشان داده شده در شکل مساحت مدار برابر است با

$$A = A_0 + a(t)$$

که A_0 مساحت مستطیل OABC و $a(t)$ مساحت مثلث کوچک ODm است.

$$a(t) = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - x^2(t)}\; x(t)$$

$$= \frac{1}{2} L\, x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} L\, x(t)$$

$$\Phi = BA \;,\; \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(A_0 + a(t)\right)B = -B\frac{da(t)}{dt} = -\frac{LBv(t)}{2}$$

با زمان ثابت است

ث) این بار $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ که

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2$$

$R = R_1 + R_2$ ، $i = \dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2}$ و $k = \dfrac{mg}{L}$ و

بنابراین

$$mva + kxv = -\frac{\left(-\frac{1}{2}LBv\right)^2}{R_1+R_2}$$

$$ma + \frac{L^2B^2}{4(R_1+R_2)}v + kx = 0 \Rightarrow b = \frac{L^2B^2}{4(R_1+R_2)}$$

ج) به ازای $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \beta)$ داریم

$$v = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta) + Ae^{-\gamma t}(-\omega')\sin(\omega' t+\beta)$$

$$a = A(\gamma^2 - \omega'^2)e^{-\gamma t}\cos(\omega' t+\beta) + 2A\omega'\gamma e^{-\gamma t}\sin(\omega' t+\beta)$$

با قرار دادن در معادله $ma + bv + kx = 0$ و برابر قرار دادن

ضرایب کمیت های مستقل $A\cos(\omega' t+\beta)e^{-\gamma t}$ ، $A\sin(\omega' t+\beta)e^{-\gamma t}$ خواهیم داشت

$$m(\gamma^2 - \omega'^2) - b\gamma + k = 0 \quad , \quad k = \frac{mg}{L}$$

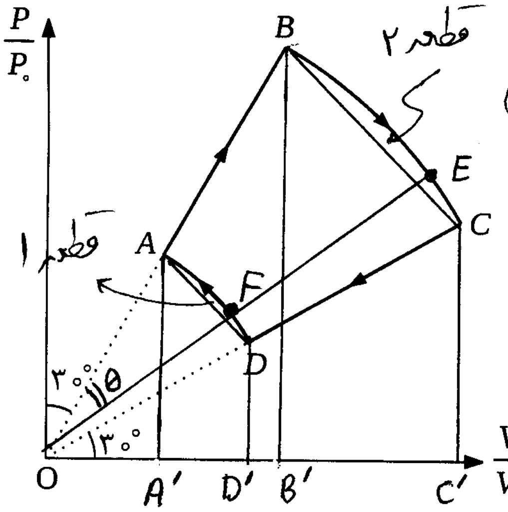
$$2m\gamma\omega' - b\omega' = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega'^2 = \frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$ با قرار دادن معادله اول

برحسب کمیت‌ها معلوم

$$\gamma = \frac{L^2B^2}{8m(R_1+R_2)}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{L^2B^2}{8m(R_1+R_2)}\right)^2}$$



معادله‌ی کمان AD: $(1)\ \left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=1$

معادله کمان BC: $(2)\ \left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=4$

معادله خط DC: $(3)\ \frac{P}{P_0}=\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)\frac{V}{V_0}$

معادله خط AB: $(4)\ \frac{P}{P_0}=\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{V}{V_0}$

از معادلات (۱) و (۴):

$$V_A=\frac{V_0}{2} \quad و \quad P_A=\frac{\sqrt{3}}{2}P_0$$

از معادله‌ی $PV=nRT$

$$T_A=\frac{\sqrt{3}}{4}T_0 \quad که \quad T_0=\frac{P_0V_0}{nR}$$

از معادلات (۲) و (۴) و معادله حالت گاز کامل

$$V_B=V_0 \quad , \quad P_B=\sqrt{3}\,P_0 \quad , \quad T_B=\sqrt{3}\,T_0$$

به طور مشابه

$$V_C=\sqrt{3}\,V_0 \quad , \quad P_C=P_0 \quad , \quad T_C=\sqrt{3}\,T_0$$

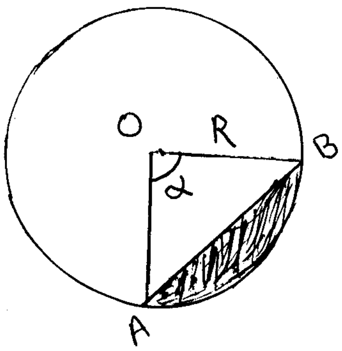
$$V_D=\frac{\sqrt{3}}{2}V_0 \quad , \quad P_D=\frac{1}{2}P_0 \quad و \quad T_D=\frac{\sqrt{3}}{4}T_0$$

ب)

$$W_{A\to B}=-(\text{مساحت ذوزنقه } ABB'A')$$
$$=-(P_A+P_B)\frac{1}{2}(V_B-V_A)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}P_0V_0$$

به طور مشابه

$$W_{C\to D}=+(\text{مساحت ذوزنقه } CDD'C')$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}P_0V_0$$



برای ادامه می‌بایست ابتدا مساحت یک قطعه از دایره (ناحیه بین کمان دایره و وتر) را به دست می‌آوریم

$$S_{\text{قطعه}}=S_{\widehat{OAB}}-S_{\triangle OAB}=\frac{R^2}{2}\alpha-\frac{1}{2}\left(R\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S_{\text{قطعه}}=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$$

$$W_{B\to C} = -(\text{مساحت ذوزنقه } BCC'B' + ۲ \text{ مساحت قطعه})$$

$$= -\left[(P_B+P_C)\frac{1}{2}(V_C-V_B) + \frac{2^2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)P_0V_0\right]$$

$$= -\left[P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{3}-1\right)P_0V_0\right] = -\frac{\pi}{3}P_0V_0$$

$$W_{D\to A} = [\text{مساحت ذوزنقه } ADD'A' + \text{مساحت قطعه ۱}]$$

$$= \left[\frac{1}{4}P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)P_0V_0\right] = \frac{\pi}{12}P_0V_0$$

پ)

$$W_{\text{چرخه}} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A}$$

$$W_{\text{چرخه}} = -\frac{\pi}{4}P_0V_0$$

ت)

$$\Delta U = Q + W$$

$$Q_{A\to B} = U_B - U_A - W_{A\to B}$$

$$= \left(\frac{3}{2}nRT_B - \frac{3}{2}nRT_A\right) - W_{A\to B} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right]P_0V_0$$

$$Q_{A\to B} = \frac{3\sqrt{3}}{2}P_0V_0$$

به طور مشابه

$$Q_{B\to C} = \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3}P_0V_0\right)\right] = \frac{\pi}{3}P_0V_0$$

$$Q_{C\to D} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}P_0V_0$$

$$Q_{D\to A} = -\frac{\pi}{12}P_0V_0$$

ث) از قانون اول ترمودینامیک :

$$dU = dW + dQ$$

$$d\left(\frac{3}{2}nRT\right) = -PdV + dQ$$

$$\frac{3}{2}d(PV) = -PdV + dQ$$

$$dQ = \frac{5}{2}PdV + \frac{3}{2}VdP$$

در تحول BC :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=4$$

$$P=P_0\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2} \Rightarrow dP=-P_0\frac{\frac{V}{V_0^2}}{\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}dV$$

$$dQ=dV\left(\frac{5}{2}P_0\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}-\frac{3}{2}P_0\frac{V^2/V_0^2}{\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}\right)$$

$$\left.\frac{dQ}{dV}\right|_{V=V_E}=0 \Rightarrow \left(\frac{V_E}{V_0}\right)^2=\frac{5}{2} \Rightarrow V_E=\sqrt{\frac{5}{2}}V_0 \;,\; P_E=\sqrt{\frac{3}{2}}P_0$$

$$T_E=\sqrt{\frac{15}{4}}T_0$$

در تحول DA :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=1$$

$$\left.\frac{dQ}{dV}\right|_{V=V_F}=0 \Rightarrow \left(\frac{V_F}{V_0}\right)^2=\frac{5}{8} \Rightarrow V_F=\sqrt{\frac{5}{8}}V_0 \;,\; P_F=\sqrt{\frac{3}{8}}P_0$$

$$T_F=\sqrt{\frac{15}{64}}T_0$$

ج) بنا بر قسمت ث) :

$$Q_{E\to C}<0 \;,\; Q_{B\to E}>0$$

$$Q_{F\to A}<0 \qquad Q_{D\to F}>0$$

$$Q_+=Q_{A\to B}+Q_{B\to E}+Q_{D\to F}$$

مطابق شکل: $\theta=\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$W_{F\to A}=(\text{مساحت قطعه } AF + \text{مساحت ذوزنقه } AFF'A')$$

$$=(P_F+P_A)\frac{1}{2}(V_F-V_A)+\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)P_0V_0$$

اما : $\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)$

$$W_{F\to A}=\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

$$Q_{F\to A}=U_A-U_F-W_{A\to F}=\frac{3}{2}nR(T_A-T_F)-W_{A\to F}$$

$$Q_{F\to A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

به طور مشابه

$$Q_{B\to E} = U_E - U_B - W_{B\to E}$$

$$= \frac{3}{2} nR\,(T_E - T_B) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

$$Q_{B\to E} = \left(\sqrt{15} - 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

سرانجام

$$Q_+ = Q_{A\to B} + Q_{B\to E} + \left(Q_{D\to A} - Q_{F\to A}\right)$$

$$Q_+ = \left(\frac{5\sqrt{15}}{4} + \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} - \frac{5}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

آ) $\underline{7}$

$$T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta = Mg$$

$$T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta = M \frac{\ell}{2} \sin\theta\, \omega^2$$

$$T_2 \cos\theta = mg$$

ب) به ازای $\theta \neq 0$:

$$T_1 - T_2 = \frac{M}{m} T_2$$

$$T_1 + T_2 = M \frac{\ell}{2} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{M \frac{\ell}{2} \omega^2}{2 + \frac{M}{m}}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2g}{\ell\omega^2}\left(\frac{2m}{M} + 1\right)$$

$$\cos\theta < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2g}{\ell\omega^2}\left(\frac{2m}{M}+1\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\frac{2m}{M}+1\right)}$$

پ) به ازای $\omega = 2\omega_m$ از معادلات قسمت ب):

$$\cos\theta = \frac{1}{4}, \quad T_2 = 4mg, \quad T_1 = 4(m+M)g, \quad \frac{\ell}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}\ell$$

ت)

(۱) $T\cos\theta - T\cos\varphi = Mg$

(۲) $T\sin\theta + T\sin\varphi = M(\ell - d)\sin\theta\, \omega^2$

(۳) $T\cos\varphi = mg$

ث) از هندسه شکل ۲ شعاع دایره مسیر

(۴) $(\ell - d)\sin\theta = d\sin\varphi$

به ازای $M = 2m$: از تقسیم معادله (۱) به معادله (۳):

(۵) $\cos\theta = 3\cos\varphi$

با قرار دادن (۴) و (۵) در $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$:

(۶) $\cos^2\theta = \dfrac{2u - 1}{u^2/9 - (1-u)^2}$

ج) با قرار دادن $\sin\varphi$ از معادلهٔ (۴) در معادله (۲) :

$$T\,\frac{l}{d} = 2m(l-d)\,\omega^2$$

$$T\cos\theta = (m+2m)g$$ با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۱)

از حذف T بین دو معادله فوق

$$(7)\quad \frac{l\omega^2}{g} = \frac{3}{2u(1-u)\cos\theta}$$

با قرار دادن $\cos\theta$ از معادله (۶) در معادله (۷) :

$$\frac{l\omega^2}{g} = \frac{\sqrt{9(1-u)^2-u^2}}{2u(1-u)\sqrt{1-2u}}$$

ج) به ازای $u=\frac{1}{4}$:

$$\omega^2 = \frac{8\sqrt{10}}{3}\,\frac{g}{l}\ ,\quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\quad T=\sqrt{10}\,mg$$

شعاع دایره مسیر $\quad d\sin\varphi = \frac{3}{4\sqrt{10}}\,l$

ج)

$$\frac{d}{du}\left(\frac{l\omega^2}{g}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{d}{du}\sqrt{9(1-u)^2-u^2}\right)u(1-u)\sqrt{1-2u} - \frac{d}{du}\left(u(1-u)\sqrt{1-2u}\right)\sqrt{9(1-u)^2-u^2} = 0$$

$$\frac{8u-9}{\sqrt{9(1-u)^2-u^2}}\,u(1-u)\sqrt{1-2u} = \frac{5u^2-5u+1}{\sqrt{1-2u}}\,\sqrt{9(1-u)^2-u^2}$$

$$(8u-9)\,u(1-u)(1-2u) = (5u^2-5u+1)\left(9(1-u)^2-u^2\right)$$

$$u^4 - \frac{11}{3}u^3 + \frac{9}{2}u^2 - \frac{9}{4}u + \frac{3}{8} = 0$$

$$c_0 = \frac{3}{8}\ ,\quad c_1 = -\frac{9}{4}\ ,\quad c_2 = \frac{9}{2}\ ,\quad c_3 = \frac{-11}{3}$$