جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۸ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و ششمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۰ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: ۰

کد ملی: ۰

نام پدر: ----

نام مدرسه: ----

استان: ----

منطقه: ----

پایه تحصیلی: ----

حوزه: ----

شماره صندلی

۰۰۰۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱. این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴. با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶. از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

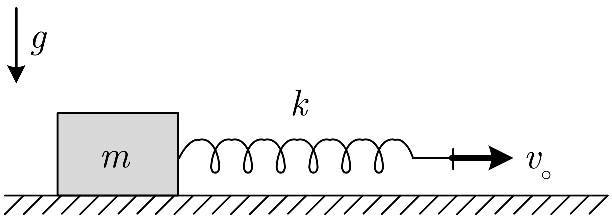
۷. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸. آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.

۹. هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

۱) جعبه‌ای به جرم m روی یک سطح افقی ساکن است.



شکل ۱

ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و سطح به ترتیب μ_s و μ_k است ($\mu_s > \mu_k$). یک سر فنری با ثابت k به سمت راست جعبه متصل است و در ابتدا با طول آزاد به طور افقی نگه داشته شده است. سر آزاد فنر را طوری می‌کشیم که همواره این سر فنر با سرعت ثابت $v_\circ$ حرکت کند. جرم فنر ناچیز و شتاب گرانش g است.

آ) فنر چقدر کشیده شود تا جعبه شروع به حرکت کند؟

ب) فرض کنید مکان اولیهٔ جعبه $x = \circ$ است و در لحظهٔ $t = \circ$ شروع به حرکت کند، شتاب جعبه را بر حسب x (مکان لحظه‌ای جعبه)، t و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید.

پ) می‌توان نشان داد که مکان لحظه‌ای جعبه، x، بر حسب زمان به صورت زیر است

$$x(t) = A(\omega t - \sin \omega t) + B(۱ - \cos \omega t),$$

A، B و ω را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ت) بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار طول فنر برای اولین بار در چه زمان‌هایی رخ می‌دهد؟

ث) در چه زمانی برای اولین بار جعبه متوقف می‌شود؟

ج) فرض کنید به محض توقف جعبه، اصطکاک جعبه با زمین از نوع اصطکاک ایستایی می‌شود. در این صورت بعد از توقف ذکر شده در بخش **ث** چه مدت جعبه متوقف می‌ماند تا دوباره حرکت کند؟

در صورت نیاز:

$$\sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}, \quad ۱ - \cos x = ۲\sin^۲\frac{x}{۲}, \quad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

۲) یک پینگ‌پنگ باز با حرکت منظم راکت به بالا و پایین می‌تواند توپ پینگ‌پنگ را به یک حرکت منظم رفت و برگشتی در جهت عمودی وادارد. در این مسئله می‌خواهیم حالت ساده‌ای از این حرکت را بررسی کنیم. فرض کنید راکت، صفحه‌ای افقی و صاف است که دارای حرکت منظم سینوسی با معادلهٔ $y_1(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ حول نقطهٔ تعادل $y = 0$ است. توپ پینگ‌پنگ را جرم نقطه‌ای m بگیریدکه مکان لحظه‌ای آن با $y_2(t)$ بیان می‌شود. برخورد توپ با راکت چنان است که سرعت راکت تغییر محسوسی نمی‌کند و اندازهٔ سرعت نسبی توپ و راکت قبل و بعد از برخورد یکسان است. (منظور از سرعت نسبی، تفاضل مقادیر جبری سرعت‌های دو جسم است.) شتاب گرانش در راستای y، رو به پایین و اندازه آن g است. این مسئله بنا به شرایط اولیهٔ توپ و راکت در دو بخش مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بخش اول: فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ راکت در پایین‌ترین نقطه مسیر یعنی در نقطهٔ $y_1 = -A$ قرار دارد و توپ از ارتفاع $y_2 = h$ رها می‌شود.

آ) بسامد زاویه‌ای ω را بر حسب h و g چنان تعیین کنید که وقتی راکت برای اولین بار از نقطهٔ $y_1 = -A$ به بالا می‌آید در نقطهٔ $y = 0$ با توپ برخورد کند.

ب) دامنهٔ نوسان راکت، A، را چنان تعیین کنید که بعد از اولین برخورد، اندازهٔ سرعت توپ دو برابر قبل از برخورد باشد.

پ) سرعت و ارتفاع بیشینهٔ توپ بعد از اولین، دومین، سومین و چهارمین برخورد را به دست آورید.

ت) نمودار $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را در بازه‌های زمانی بین برخوردهای ذکر شده رسم کنید. بعد از چهارمین برخورد حرکت چگونه خواهد بود؟

بخش دوم: این بار فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ راکت در نقطهٔ $y_1 = 0$ است و به سمت پایین حرکت می‌کند. توپ نیز از ارتفاع $y_2 = h$ رها می‌شود.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

ث) بسامد زاویه‌ای ω را بر حسب h و g چنان تعیین کنید که راکت بعد از رفتن به پایین و در ضمن برگشتن به بالا در نقطه $y = ۰$ با توپ برخورد کند.

ج) دامنهٔ نوسان راکت، A، را چنان تعیین کنید که بعد از اولین برخورد، اندازهٔ سرعت توپ دو برابر قبل از برخورد باشد.

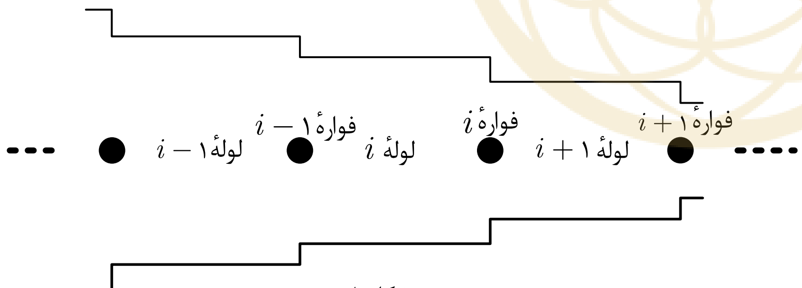
چ) سرعت و ارتفاع بیشینهٔ توپ بعد از اولین، دومین و سومین برخورد را به دست آورید.

ح) نمودار $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ را در بازه‌های زمانی بین برخوردهای ذکر شده رسم کنید. بعد از سومین برخورد حرکت چگونه خواهد بود؟

۳) باغ فین یکی از جاذبه‌های گردشگری و مهندسی شهر کاشان است. در این باغ چند سامانهٔ آبیاری بسیار دقیق وجود دارد. طراح این سامانه‌ها، دانشمند معروف قرن دهم، شیخ بهایی (و یا به روایتی غیاث‌الدین جمشید کاشانی) است که حدود دویست سال قبل از برنولی با استفاده از اختلاف ارتفاع و تغییر قطر لوله‌ها فواره‌هایی را ایجاد کرد که آب از همگی آن‌ها تا یک ارتفاع یکسان خارج می‌شود.

آب از ارتفاعات بالادست، به وسیلهٔ یک لوله از یك طرف وارد باغ می‌شود و چون انتهای آن بسته است تمام آب ورودی از فواره‌هایی که در طول مسیر با فواصل یکسان قرار دارند، خارج می‌شود. شیب لوله باعث افزایش فشار در طول لوله و اصطکاک آب با دیوارهٔ لوله باعث کاهش آن می‌شود. فرض می‌کنیم این دو اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و باعث می‌شوند سرعت آب در سرتاسر لوله یکنواخت و ثابت باشد. به این ترتیب، با وجود حرکت آب می‌توان قوانین شاره‌های ساکن را برای آن به کار برد و فرض کرد لوله‌ای افقی و بدون اصطکاک داریم که فشار در طول آن یکسان است. به این ترتیب مقدار پرش آب در تمام فواره‌های یکسانی که در طول مسیر نصب شده‌اند برابر است.

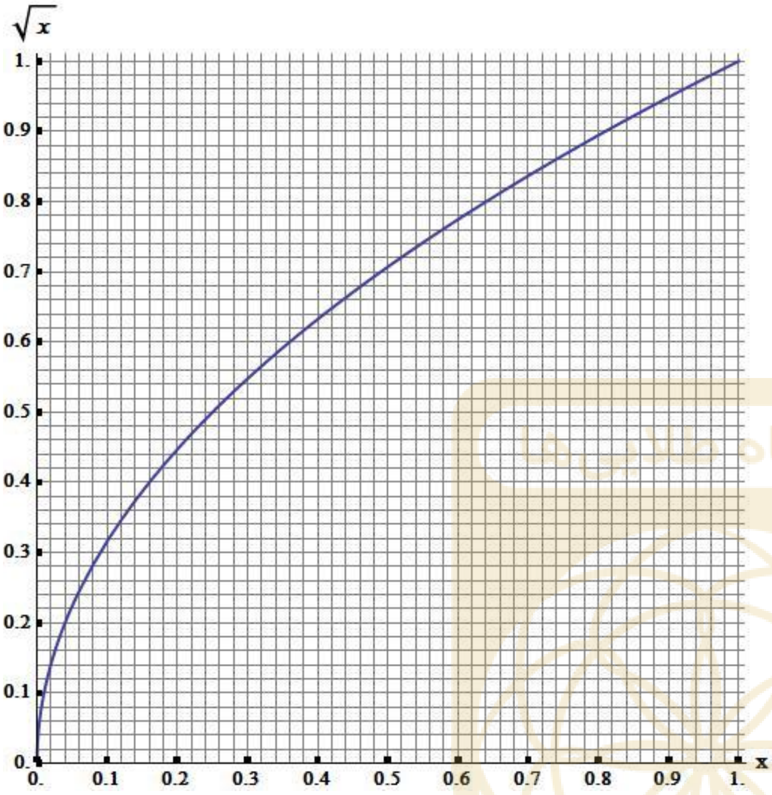
فرض کنید قطر لولهٔ ورودی D_1 و آهنگ شارش حجمی ورودی در آن Q_1 است. شکل ۱ موقعیت مکانی فواره‌ها در طول لوله را از بالا نشان می‌دهد. از ابتدا تا انتهای لوله ۱۰ فواره نصب شده است که شمارهٔ آن‌ها را با k نشان می‌دهیم. فوارهٔ kام در انتهای لوله‌ای است که قطر آن D_k و آهنگ شارش حجمی گذرنده از آن Q_k است.



شکل ۱

آ) Q_k را بر حسب Q_1 و k بیابید.

ب) D_k را بر حسب D_1 و k به دست آورید.



شکل ۲

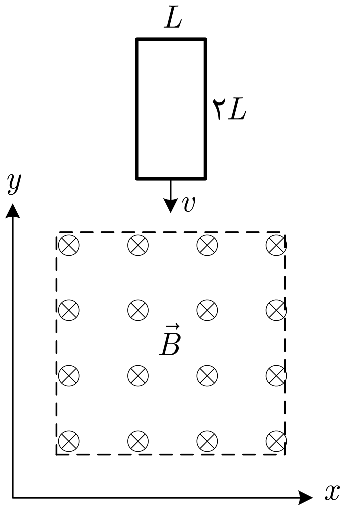
پ) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ که در شکل ۲ داده شده است مقادیر عددی $\frac{D_2}{D_1}$ تا $\frac{D_{10}}{D_1}$ را تا دو رقم معنی‌دار به دست آورید. نتایج خود را در یک جدول نمایش دهید.

حال می‌خواهیم اثر اصطکاک و گرانش را نیز بررسی کنیم. در فیزیک شاره‌ها نشان می‌دهند که اگر در لوله‌ای به قطر D آهنگ شارش حجمی Q باشد، اصطکاک در طولی به اندازهٔ l از لوله باعث افت فشار $\Delta p=-\frac{ClQ}{D^4}$ می‌شود که در آن ضریب ثابت C به دما و جنس مایع و لوله بستگی دارد. (به این رابطه قانون پوازی می گویند.)

ت) طول هر کدام از لوله‌ها را l، چگالی آب را ρ و شتاب گرانش زمین را g بگیرید. برای جبران اثر اصطکاک و ثابت نگه داشتن سرعت آب درون همهٔ لوله‌ها، اختلاف ارتفاع مورد نیاز، Δh_k ، بین دو سر لولهٔ kام را بر حسب k، C، l، ρ، g، D_1 و Q_1 به دست آورید. این کاهش ارتفاع را به وسط لوله نسبت می‌دهیم.

ث) به ازای مقادیر عددی $l=3/0\ \mathrm{m}$، $\rho=1000\ \mathrm{kg/m^3}$، $g=10\ \mathrm{m/s^2}$، $C=0/040\ \mathrm{N.s/m^2}$، $D_1=10\ \mathrm{cm}$ و $Q_1=10\ \mathrm{L/s}$ مقدار Δh_1، Δh_5 و Δh_{10} را بر حسب سانتی‌متر تا دو رقم معنی‌دار به دست آورید.

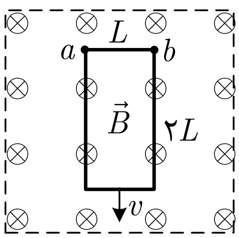
۴) یک حلقهٔ رسانا به جرم M و مقاومت الکتریکی R به شکل مستطیلی به ابعاد L و $۲L$ است. این حلقه مطابق شکل ۱ با سرعت v در جهت $-y$ وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت B عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت داخل برقرار است. حرکت در خلاء صورت می‌گیرد و میدان گرانشی نیز در کار نیست.



شکل ۱

آ) معین کنید جهت جریان القایی در حلقه هنگامی که بخشی از آن وارد ناحیهٔ میدان مغناطیسی شده، ساعتگرد یا پادساعتگرد است. نشان دهید در این حالت، میدان مغناطیسی نیروی ترمزی $\vec{F}(t) = -k\vec{v}$ را به حلقه وارد می‌کند که $\vec{v}$ بردار سرعت حلقه است. ضریب k را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

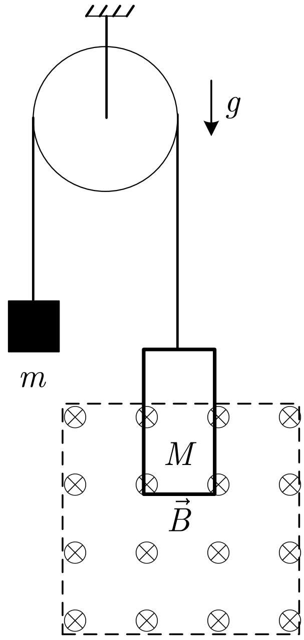
ب) به جای یک حلقه، یک سیم‌پیچ با N دور و با همان ابعاد جایگزین می‌کنیم. ضریب k را در این حالت به دست آورید.



شکل ۲

پ) در حالتی که حلقه مطابق شکل ۲ کاملاً داخل میدان قرار دارد و با سرعت v به حرکت ادامه می‌دهد، بارهای الکتریکی مخالف در دو سمت ضلع‌های به طول L تجمع می‌کنند. در نتیجهٔ این تجمع، میدان الکتریکی در فاصلهٔ بین نقاط a و b ایجاد می‌شود. اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه، $V_b - V_a$، چقدر است؟

ت) دستگاه شکل ۳ را در نظر بگیرید. در این حالت میدان گرانشی g به سمت پایین برقرار است. دستگاه از حالت سکون رها می‌شود. در سمت راست این دستگاه حلقهٔ بخش **آ** به تدریج از بالا وارد ناحیهٔ میدان می‌شود و سرانجام از آن خارج می‌شود. شتاب دستگاه را در طی مراحل مختلف عبور حلقه از ناحیهٔ میدان بر حسب M، m، g، k و سرعت لحظه‌ای حلقه، v، به دست آورید. از جرم ریسمان و قرقره و اصطکاک محور قرقره صرفنظر کنید.



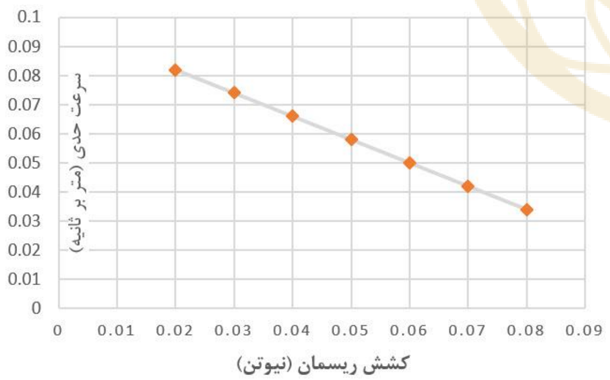
شکل ۳

ث) در مرحله‌ای از حرکت بخش **ت** که در آن ضلع پایینی حلقه داخل میدان و ضلع بالایی خارج میدان قرار دارد سرعت لحظه‌ای به صورت تابع $v(t) = \alpha + (v_۰ - \alpha)\mathrm{e}^{-\beta t}$ به دست می‌آید. در این رابطه $t = ۰$ لحظه‌ای است که لبهٔ پایینی حلقه وارد میدان می‌شود و $v_۰$ سرعت حلقه در همین لحظه است. ضرایب α و β را بر حسب داده‌های مسئله بیابید.

توضیح: تابع $\mathrm{e}^{-\beta t}$ تابع نمایی نام دارد که e عدد نپر است و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار $\mathrm{e} \cong ۲/۷۲$ است. تابع نمایی فوق، عدد نپر به توان $-\beta t$ است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\dfrac{d\,\mathrm{e}^{-\beta t}}{dt} = -\beta\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ است.

ج) فرض کنید در لحظهٔ رها کردن حلقه، لبهٔ پایینی آن در ارتفاع h بالاتر از لبهٔ بالایی میدان باشد. h را بر حسب M، m، g و k چنان تعیین کنید که بعد از لحظهٔ $t = ۰$ و تا قبل از آن که کاملاً وارد میدان شود، حلقه با سرعت ثابت حدی به حرکت ادامه دهد.

چ) آزمایشی را با شرایط مذکور در بخش **ج** و با تغییر جرم m چندین بار تکرار می‌کنیم. در هر بار آزمایش نیروی کشش ریسمان و سرعت ثابت حدی دستگاه را اندازه‌گیری می‌کنیم. در شکل ۴ نمودار سرعت حدی دستگاه بر حسب نیروی کشش ریسمان رسم شده است. با توجه به این نمودار، ضریب k و جرم حلقه را به دست آورید. شتاب جاذبه را $g = ۱۰\ \mathrm{m/s^2}$ بگیرید.



شکل ۴

ح) با توجه به نتایج عددی بخش **چ** و با فرض آن که $B = ۰/۶\ \mathrm{T}$، و سطح مقطع سیمی که حلقه از آن ساخته شده است ثابت و مقاومت ویژهٔ آن $\rho = ۴ \times ۱۰^{-۸}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ باشد، چگالی جرمی حلقه، D، چقدر است؟

نام : ---

نام خانوادگی : ---

کد ملی : ---

۵) در این مسئله با یک مدل سادهٔ فیزیکی طرز کار یک باتری را بررسی می‌کنیم. در بین دو صفحهٔ رسانای موازی A و B که قطب‌های $+$ و $-$ باتری هستند یک الکترولیت، یعنی محلولی شامل یون‌های قابل تحرک، قرار دارد. برای سادگی فرض کنید در الکترولیت مورد نظر ما فقط یک نوع یون قابل تحرک وجود دارد. فرض کنید ناحیهٔ بین دو قطب را با صفحات فرضی موازی با قطب‌ها به $k+1$ ناحیه (سلول) تقسیم کنیم به طوری که k عدد بسیار بزرگی باشد. هر ناحیه را با یک شمارهٔ i مشخص می‌کنیم که از ناحیهٔ مجاور قطب منفی با $i=0$ شروع می‌شود و تا ناحیهٔ مجاور قطب مثبت با $i=k$ ادامه می‌یابد.

فرض کنید در لحظهٔ دلخواه t تعداد $n_i(t)$ یون در ناحیهٔ i قرار دارد. در طی بازهٔ زمانی Δt یک یون با احتمال p از ناحیهٔ i به ناحیهٔ $i+1$ و با احتمال q به ناحیهٔ $i-1$ می‌رود. در نتیجه با احتمال $1-(p+q)$ سر جای خود می‌ماند. تعداد یون‌ها بسیار زیاد است، به طوری که می‌توان تعداد ذرات در یک ناحیه را با متوسط تعداد در همان ناحیه برابر گرفت.

آ) تعداد یون‌ها در ناحیهٔ i در زمان $t+\Delta t$ را بر حسب تعداد یون‌ها در همان ناحیه و نواحی مجاور در زمان t به دست آورید.

ب) در حالت پایا تعداد یون‌ها در هر ناحیه، دیگر به زمان وابسته نیست. در این حالت، تعداد ذرات هر ناحیه را به دست آورید.

راهنمایی: در اینجا به معادله‌ای به صورت $n_i = \alpha n_{i-1} + \beta n_{i+1}$ می‌رسید که به معادلهٔ فیبوناچی معروف است. برای حل این معادله می‌توانید فرض کنید که جواب به صورت $n_i = x^i$ است. در این صورت دو جواب برای x به دست می‌آید که ما آنها را x_1 و x_2 می‌نامیم. جواب کلی معادلهٔ فیبوناچی به صورت $n_i = A_1 x_1^i + A_2 x_2^i$ است. ثابت‌های A_1 و A_2 را فعلاً مفروض بگیرید. در بخش‌های بعدی مسئله، آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

پ) مجموع تعداد کل یون‌ها را در نواحی صفر تا k به دست آورید.

ت) بار الکتریکی هر یون را Q بگیرید. در حالت پایا جریان الکتریکی باتری، I، ثابت و برابر جریان بین هر دو ناحیهٔ مجاور i و $i+۱$ است و می‌تواند به صورت تابعی از Q، p، q، Δt و ثابت‌های $A_۱$ و $A_۲$ باشد. I را به دست آورید.

در یک باتری فرایندهای شیمیایی که در کنار قطب‌ها رخ می‌دهند روی جمعیت یون‌ها تأثیرگذارند. فرض کنید این فرایندها طوری است که تعداد یون‌ها در ناحیهٔ مجاور قطب منفی مقدار ثابت $n_\circ$ و در ناحیهٔ مجاور قطب مثبت مقدار ثابت n_k باشد. همچنین به دلیل اختلاف پتانسیل V بین قطب‌ها، داخل الکترولیت میدان الکتریکی برقرار می‌شود که باعث تفاوت p و q می‌شود. برای سادگی فرض کنید $p=(a-bQ\dfrac{V}{k})\Delta t$ و $q=(a+bQ\dfrac{V}{k})\Delta t$ که a و b مقادیر ثابتی هستند. همچنین به دلیل زیاد بودن تعداد نواحی می‌توان فرض کرد که $bQ\dfrac{V}{k}$ از a بسیار کوچک‌تر است.

راهنمایی: برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ می‌توان از رابطهٔ تقریبی $(۱+\varepsilon)^k \approx ۱+k\varepsilon$ استفاده کرد (به شرط آن که $|k\varepsilon|$ نیز خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد).

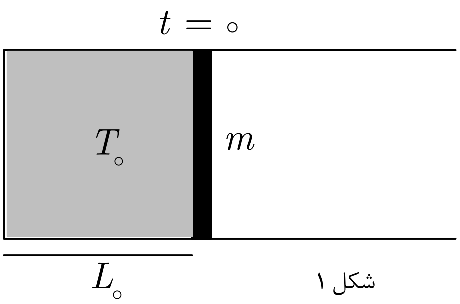
ث) در حالت مدار باز که از باتری جریان الکتریکی نمی‌گذرد، ثوابت وابسته به شرایط مرزی $A_۱$ و $A_۲$ را به دست آورده و اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری، $V_\circ$، را بر حسب ثوابت a، b، $n_\circ$، n_k، Q و k بیابید.

ج) نشان دهید در حالتی که جریان کوچک I در باتری برقرار است، اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری، V، به صورت $V=V_\circ-RI$ است که $V_\circ$ اختلاف پتانسیل بین قطب‌های باتری در حالت مدار باز است. کمیت R را بر حسب ثوابت a، b، $n_\circ$، n_k، Q و k بنویسید.

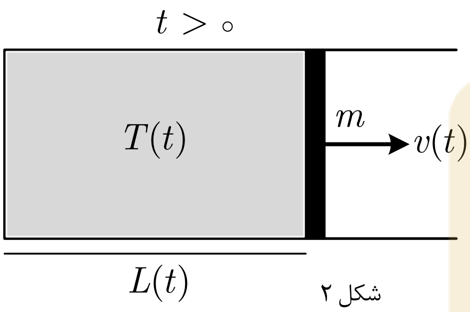
نام : ---

نام خانوادگی : ---

کد ملی : ---



شکل ۱



شکل ۲

٦) مقداری گاز آرمانی داخل یک ظرف استوانه‌ای به وسیلهٔ پیستونی به جرم m محبوس شده است. در لحظهٔ $t = 0$ دمای گاز T_0 است و پیستون به فاصلهٔ L_0 از انتهای استوانه نگه داشته شده است. بیرون استوانه خلاء است و اصطکاک پیستون و استوانه ناچیز است. استوانه و پیستون عایق گرما هستند.

پیستون را رها می‌کنیم تا گاز به طور بی‌دررو منبسط شود و پیستون را به حرکت درآورد. در لحظهٔ دلخواه t دمای گاز بر حسب کلوین $T(t)$، سرعت پیستون $v(t)$ و فاصلهٔ پیستون از انتهای استوانه $L(t)$ است.

لازم به توضیح است که انرژی درونی یک گاز آرمانی در دمای T برابر $U = C_V T$ است. C_V ظرفیت گرمایی گاز در حجم ثابت نامیده می‌شود و در این مسئله آن را ثابت فرض می‌کنیم. برای یک گاز آرمانی طی یک فرایند بی‌دررو، کمیت $TV^{\gamma-1}$ مقدار ثابتی است، که T دمای گاز، V حجم گاز و γ عدد ثابتی موسوم به ضریب اتمیسته است.

آ) با استفاده از پایستگی انرژی، سرعت لحظه‌ای پیستون، $v(t)$، را بر حسب دمای لحظه‌ای گاز، $T(t)$، و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) با توجه به ثابت بودن کمیت $TV^{\gamma-1}$ در هر لحظهٔ دلخواه t، رابطه‌ای بین $\frac{dT(t)}{dt}$ و $v(t) = \frac{dL(t)}{dt}$ به دست آورید.

منظور از $\frac{dT(t)}{dt}$ مشتق دما نسبت به زمان و منظور از $\frac{dL(t)}{dt}$ مشتق طول L نسبت به زمان است.

پ) از روابط بخش‌های **آ** و **ب**، $\frac{dT(t)}{dt}$ را بر حسب $T(t)$ و سایر کمیت‌های ثابت (مستقل از زمان) داده شده به دست آورید.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

ت) معادلهٔ به دست آمده در بخش **پ** را بر حسب متغیرهای بدون یکای فیزیکی (بدون بُعد) x و y که در زیر معرفی می‌شوند، بنویسید

$$y(x) = \frac{T(t)}{T_0}, \quad x = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{mL_0^2}{2C_V T_0}}.$$

ث) حال فرض کنید گاز آرمانی این مسئله تک‌اتمی است که برای آن $\gamma = \frac{5}{3}$ است. معادلهٔ به دست آمده در قسمت **ت**، تا زمانی که گاز داخل استوانه محبوس باشد، دارای جوابی به شکل زیر است

$$x = a\left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

ثابت‌های عددی a و b را با این الزام که جواب پیشنهادی، به ازای هر x و y مجاز باید در معادلهٔ بخش **ت** صدق کند، به دست آورید.

ج) $y(x)$ را به دست آورید.

راهنمایی: برای حل یک معادلهٔ درجه ۳ به صورت $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$ کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$Q = \frac{1}{9}(3a_2 - a_1^2), \quad R = \frac{1}{54}(9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3),$$

در حالتی که $D = Q^3 + R^2 > 0$، معادله فقط یک جواب قابل قبول به صورت زیر دارد

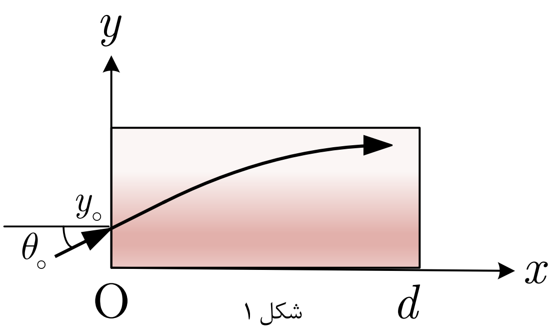
$$z = \quad R + \sqrt{D} \quad ^{\frac{1}{3}} + \quad R - \sqrt{D} \quad ^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a_1 .$$

نام : ---

نام خانوادگی : ---

کد ملی : ---

۷) در یک محلول شفاف، به دلیل تفاوت غلظت مادهٔ حل شده، ضریب شکست می‌تواند در ارتفاع‌های مختلف از کف ظرف تفاوت داشته باشد. در شکل ۱، صفحهٔ $x-y$ برش قائم یک محلول را نشان می‌دهد که در ظرفی به شکل مکعب مستطیل ریخته شده است. خط $y=0$ کف ظرف و خطوط $x=0$ و $x=d$ دیواره‌های ظرف را نشان می‌دهند. بیرون ظرف، هوا با ضریب شکست ۱ است.



شکل ۱

باریکهٔ نوری مطابق شکل ۱، در صفحهٔ $x-y$ با زاویهٔ کوچک θ_0 به نقطهٔ $(0, y_0)$ از دیوارهٔ سمت چپ می‌تابد و وارد محلول می‌شود. (برای وضوح بیشتر، شکل‌ها در راستای y بزرگ‌تر از واقع رسم شده‌اند.) فرض کنید دیواره‌های ظرف بسیار نازک است به طوری که اثر محسوسی در مسئله ندارد. باریکهٔ نور پس از ورود به محلول، همانند پدیدهٔ سراب، مسیری خمیده را طی می‌کند که معادلهٔ آن $y = A\cos[\alpha(x-B)]$ است.

آ) ضریب شکست متغیر محلول، $n(y)$، را بر حسب y، A، α و اندازهٔ ضریب شکست محلول در کف ظرف، $n_0 = n(y=0)$، به دست آورید.

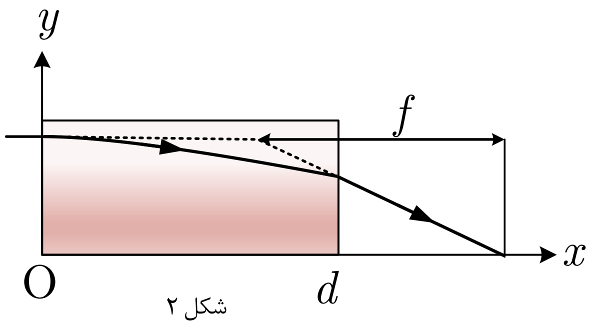
ب) رابطهٔ به دست آمده در بخش **آ** را برای مقادیر αA خیلی کوچک‌تر از ۱ تقریب بزنید. برای این کار با استفاده از راهنمایی زیر جواب را به صورت یک چندجمله‌ای از توان‌های مختلف α بنویسید و سپس از جملات با توان ۳ و بالاتر چشم‌پوشی کنید. در ادامهٔ مسئله نیز از همین تقریب استفاده کنید.

راهنمایی: برای $|\varepsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ می‌توان از رابطهٔ تقریبی $(1+\varepsilon)^k \approx 1 + k\varepsilon$ استفاده کرد (به شرط آن که $|k\varepsilon|$ نیز خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد).

پ) ثابت‌های A و B را با فرض کوچک بودن θ_0 بر حسب کمیت‌های α، y_0 و θ_0 به دست آورید.

نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---

ت) اگر نور به صورت افقی وارد محلول شود و مطابق شکل ۲ خم شود، فاصلهٔ کانونی سامانه، f، که در شکل مشخص شده است را بر حسب n_0، α و d تا مرتبهٔ تقریبی که در قسمت **ب** ذکر شد به دست آورید.



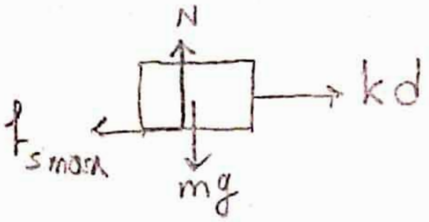
شکل ۲

ث) فاصلهٔ دیوارهٔ سمت راست محلول تا نقطهٔ کانونی را بر حسب n_0، α و d به دست آورید.

ج) برای این محلول، ضریب شکست به طول موج، λ، وابسته است و در کف ظرف به صورت $n_0(\lambda) = C + \dfrac{D}{\lambda^2}$ است که در آن C و D اعداد ثابتی هستند. فرض کنید کمیت α به طول موج بستگی ندارد. اگر نور ورودی به محلول از طول موج λ_1 به λ_2 تغییر کند، میزان جابجایی نقطه کانون را بر حسب λ_1، λ_2، α، d، C و D به دست آورید.

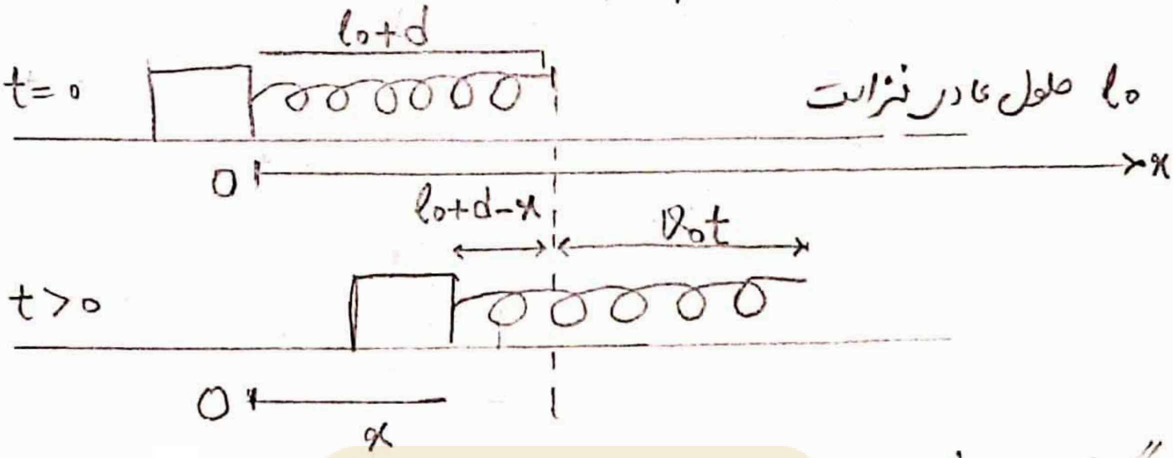
P1

آ)



$$N = mg$$
$$kd = f_{s\,max} \Rightarrow d = \frac{\mu_s m g}{k}$$
$$f_{s\,max} = \mu_s N$$

ب) l_0 طول عادی فنر است



کشیدگی فنر در لحظهٔ t ، $(l_0+d-x+v_0t)-l_0$ است ، در نتیجه

$$N = mg$$
$$k(d-x+v_0t) - f_k = ma \Rightarrow a = \frac{k}{m}(v_0t-x) + (\mu_s-\mu_k)g \quad (1)$$
$$f_k = \mu_k N$$

پ)

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 (A \sin\omega t + B \cos\omega t)$$
$$= \omega^2 (A\omega t + B - x(t)) \quad (2)$$

از معادلات (۱) و (۲):

$$\omega^2 (A\omega t + B - x) = \frac{k}{m}(v_0 t - x) + (\mu_s - \mu_k) g$$

در نتیجه

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad A\omega^3 = \frac{k}{m} v_0, \quad \omega^2 B = (\mu_s - \mu_k) g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad B = \frac{mg}{k}(\mu_s - \mu_k)$$

ت) طول فنر در لحظهٔ t :

$$l(t) = l_0 + d - x + v_0 t$$
$$= l_0 + \frac{\mu_s m g}{k} - A(\omega t - \sin\omega t) - B(1 - \cos\omega t) + v_0 t$$

$$\ell(t) = l_0 + \frac{\mu_k m g}{k} + A\left(\sin\omega t + \frac{B}{A}\cos\omega t\right)$$

اگر بنویسیم

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{g}{v_0}\,(\mu_s - \mu_k) = \tan\theta$$

$$\sin\omega t + \frac{B}{A}\cos\omega t = \sin\omega t + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\omega t$$

و با توجه به راهنمایی:

$$= \frac{\sin(\omega t+\theta)}{\cos\theta}$$

$$\ell = \ell_0 + \frac{\mu_k m g}{k} + \frac{A}{\cos\theta}\sin(\omega t+\theta)$$

$\sin(\omega t+\theta) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ بیشترین طول فنر برای اولین بار

$\sin(\omega t+\theta) = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ کمترین طول فنر برای اولین بار

ث) داریم

$$x(t) = A\omega t + B - \frac{A}{\cos\theta}\sin(\omega t+\theta)$$

$$v(t) = A\omega - \frac{A\omega}{\cos\theta}\cos(\omega t+\theta)$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t+\theta) = \cos\theta$$

$$\omega t + \theta = \theta,\ 2\pi-\theta,\ 2\pi+\theta,\ \ldots$$

در $t=0$ که سرعت جسم صفر است.

اولین زمان بعدی که سرعت صفر می‌شود $\omega t+\theta = 2\pi-\theta$ است و لذا

$$t_1 = \frac{2}{\omega}(\pi-\theta)$$

ج) طول فنر در لحظهٔ t_1 برابر است با $\ell(t_1) = \ell_0 + \frac{\mu_k m g}{k} + \frac{A}{\cos\theta}(-\sin\theta)$

و کشیدگی فنر در لحظهٔ t_1: $\ell(t_1) - \ell_0 = \frac{mg}{k}(2\mu_k - \mu_s) < d$

و مدتی که طول می‌کشد طول فنر به d برسد، T، برابر است با

$$d - (\ell(t_1) - \ell_0) = v_0 T \Rightarrow T = \frac{2mg}{k v_0}(\mu_s - \mu_k)$$

P2

بخش اول :

$y_1(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

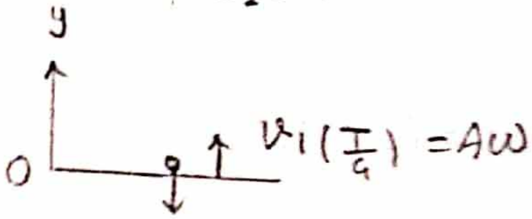
$y_1(0) = -A \Rightarrow \phi = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow y_1(t) = -A \cos\omega t$

$v_1(t) = A\omega \sin\omega t$

آ) $h = \frac{1}{2} g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}$

• $y_2 = h$



$v_2(\frac{T}{4}) = -\sqrt{2gh} \equiv -v_0$

ب) $\Rightarrow v_1(\frac{T}{4}) - v_2(\frac{T}{4}) = v_2'(\frac{T}{4}) - v_1(\frac{T}{4})$

اگر v_0 اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن به $y=0$ باشد می‌خواهیم $v_2'(\frac{T}{4}) = 2v_0$.

یعنی:

$A\omega - (-v_0) = 2v_0 - A\omega \Rightarrow A\omega = \frac{v_0}{2} \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega} = \frac{2h}{\pi}$

پ) ✓ بعد از اولین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_1 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h$ است.

دومین برخورد نیز در $y=0$ اتفاق می‌افتد، زیرا زمان رفت توپ به $y=h_1$ و برگشت آن به $y=0$ برابر $4t_0 = T$ و زمان دومین برخورد $t = T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ است

که $y_1(\frac{5T}{4}) = 0$، در این لحظه $v_1(\frac{5T}{4}) = A\omega$ است.

مجدداً برخورد در $y=0$ را بررسی می‌کنیم

$A\omega - (-2v_0) = v_2'(\frac{5T}{4}) - A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{5T}{4}) = 3v_0$

✓ بعد از دومین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $3v_0$ پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_2 = \frac{(3v_0)^2}{2g} = 9h$ است.

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0+5t_0=11t_0=11\frac{T}{9}$ اتفاق می‌افتد.

در این لحظه $v_1\left(\frac{11T}{9}\right)=-A\omega$ است.

برخورد در $y=0$:

$$-A\omega-(-3v_0)=v_2'\left(\frac{11T}{9}\right)-(-A\omega) \Rightarrow v_2'\left(\frac{11T}{9}\right)=2v_0$$

✓ بعد از سومین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت $2v_0$ برتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_3=\frac{(2v_0)^2}{2g}=4h$ خواهد بود.

چهارمین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $4t_0+11t_0=15t_0=15\frac{T}{9}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه $v_1\left(\frac{15T}{9}\right)=-A\omega$ است.

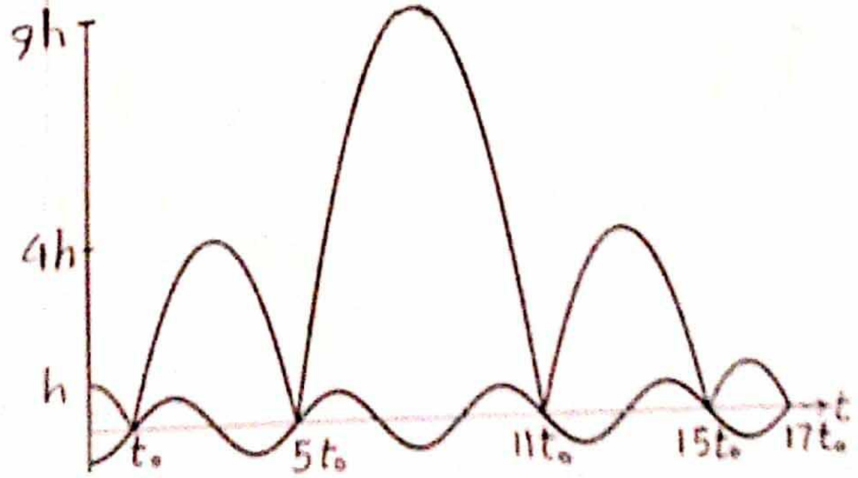
برخورد در $y=0$:

$$-A\omega-(-2v_0)=v_2'\left(\frac{15T}{9}\right)-(-A\omega) \Rightarrow v_2'\left(\frac{15T}{9}\right)=v_0$$

✓ بعد از چهارمین برخورد: توپ به سمت بالا با اندازه سرعت v_0 پرتاب و ارتفاع بیشینه از $y=0$ برابر $h_4=\frac{v_0^2}{2g}=h$ خواهد بود.

از این به بعد حرکت تکرار می‌شود.

ت)



در صورتی که شکل تکه تکه رسم شده باشد نیز قابل قبول خواهد بود

بخش دوم :

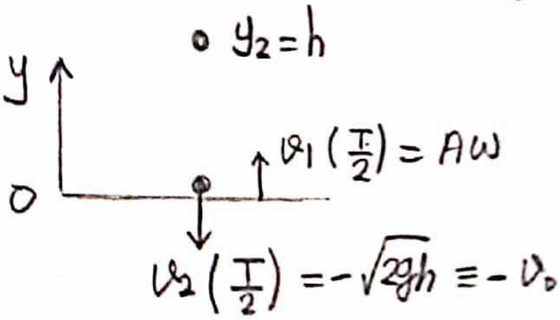
$y_1(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

$y_1(0) = 0$ ، $v_1(0) < 0 \Rightarrow \phi = \pi \Rightarrow y_1(t) = -A\sin\omega t$

$v_1(t) = -A\omega\cos\omega t$

الف) $h = \frac{1}{2} g t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_0 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}$

$\omega = \pi\sqrt{\frac{g}{2h}}$



ب) $\Rightarrow v_1(\frac{T}{2}) - v_2(\frac{T}{2}) = v_2'(\frac{T}{2}) - v_1(\frac{T}{2})$

اگر v_0 اندازه سرعت توپ در لحظه رسیدن به $y=0$ باشد، می‌خواهیم $v_2'(\frac{T}{2}) = 2v_0$ ،

یعنی: $A\omega - (-v_0) = 2v_0 - A\omega \Rightarrow A\omega = \frac{v_0}{2} \Rightarrow A = \frac{h}{\pi}$

ج) ✓ بعد از اولین برخورد؛ سرعت توپ به سمت بالا $2v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_1 = \frac{(2v_0)^2}{2g} = 4h$ است

دومین برخورد در $y=0$ و در زمان $4t_0 + t_0 = 5t_0 = \frac{5T}{2}$ اتفاق می‌افتد، در این لحظه $v_1(\frac{5T}{2}) = A\omega$ است،

$A\omega - (-2v_0) = v_2'(\frac{5T}{2}) - A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{5T}{2}) = 3v_0$

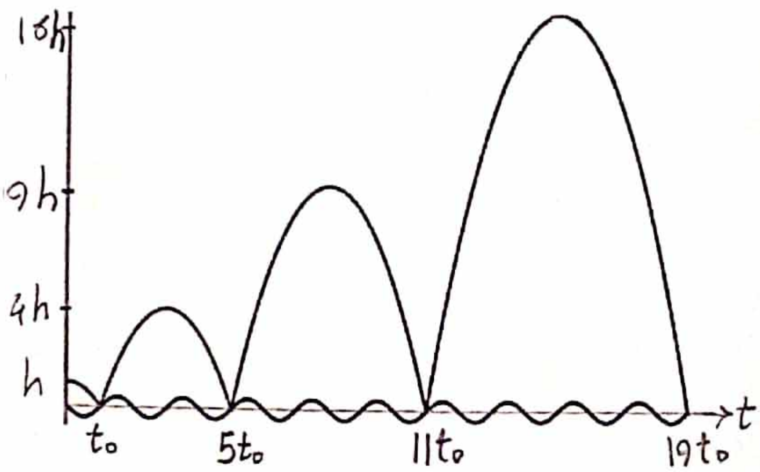
✓ بعد از دومین برخورد؛ سرعت توپ به سمت بالا $3v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_2 = \frac{(3v_0)^2}{2g} = 9h$ است

سومین برخورد نیز در $y=0$ و در زمان $6t_0 + 5t_0 = 11t_0 = 11\frac{T}{2}$ اتفاق می‌افتد. در این لحظه $v_1(\frac{11T}{2}) = A\omega$ است،

$A\omega - (-3v_0) = v_2'(\frac{11T}{2}) - A\omega \Rightarrow v_2'(\frac{11T}{2}) = 4v_0$

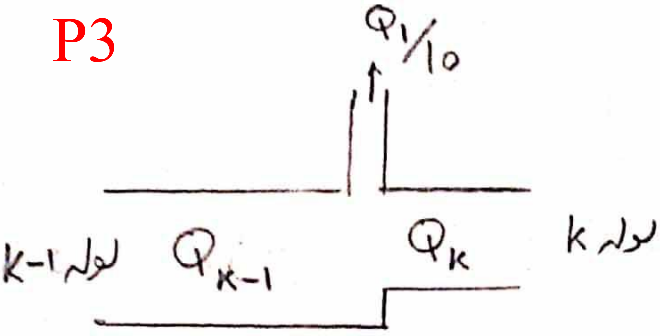
✓ بعد از سومین برخورد؛ سرعت توپ به سمت بالا $4v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_3 = \frac{(4v_0)^2}{2g} = 16h$ است،

د) وضعیت به ترتیب بالا ادامه می‌یابد به طوری که بعد از n امین برخورد، سرعت توپ به سمت بالا $(n+1)v_0$ و ارتفاع بیشینه $h_n = (n+1)^2 h$ خواهد بود،



در صورتی که که شکل
تکه تکه رسم شده
باشد نیز قابل
قبول خواهد بود

P3



آ) به دلیل تقارن آب درون لوله ها داریم

$$Q_K = Q_{K-1} - \frac{Q_1}{10}$$
$$Q_{K-1} = Q_{K-2} - \frac{Q_1}{10}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Q_2 = Q_1 - \frac{Q_1}{10}$$

از جمع روابط فوق

$$Q_K = Q_1 - (K-1)\frac{Q_1}{10} = \left(\frac{11-k}{10}\right) Q_1$$

ب) اگر D_k قطر لوله k ام باشد و طبق فرض شده سرعت آب در همه لوله ها یکسان و برابر v باشد آهنگ شارش آب در لوله k ام برابر است با $Q_K = \pi\left(\frac{D_K}{2}\right)^2 v$. با استفاده از نتیجه قسمت آ:

$$\pi\left(\frac{D_K}{2}\right)^2 v = \frac{11-k}{10}\,\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 v \Rightarrow D_K = D_1\sqrt{\frac{11-k}{10}}$$

پ) به ازای $k=2$: $\frac{D_2}{D_1} = \sqrt{0.9} = 0.95$ ، $\frac{D_{10}}{D_1} = \sqrt{0.1} = 0.32$

و الی آخر

D_2/D_1	D_3/D_1	D_4/D_1	D_5/D_1	D_6/D_1	D_7/D_1	D_8/D_1	D_9/D_1	D_{10}/D_1
0.95	0.89	0.84	0.77	0.71	0.63	0.55	0.45	0.32

پاسخ های دارای اختلاف ± 0.01 با جدول فوق نیز پذیرفته می شوند.

ت) اگر ΔP اختلاف فشار آب بین ابتدا و انتهای لوله k و l طول لوله k ام باشد

$$\Delta P = -\frac{c l Q_K}{D_K^4} = \rho g \Delta h_K$$

$$\Delta h_K = -\frac{cl}{\rho g}\,\frac{Q_1}{D_1^4}\,\frac{10}{11-k} = -0.0012\left(\frac{10}{11-k}\right) m$$

ث)

$\Delta h_1 = -0.12$ cm

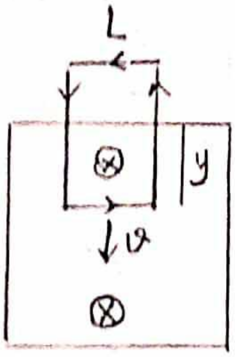
$\Delta h_5 = -0.20$ cm

$\Delta h_{10} - 1.2$ cm

پاسخ های با علامت + نیز قابل قبول است.

P4

آ) مطابق قانون لنز جهت جریان القایی باید پادساعتگرد باشد،



$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLy) = -BL\frac{dy}{dt} = -BLv$$

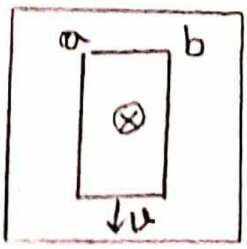
$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2L^2v^2}{R} = -\vec{F}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{B^2L^2\vec{v}}{R}$$

بنابراین $k = \frac{B^2L^2}{R}$

ب)

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -NBLv$$

$$P = \frac{N^2B^2L^2v^2}{NR} \Rightarrow k = \frac{NB^2L^2}{R}$$



پ) به بار الکتریکی q که با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند نیروی $q\vec{v}\times\vec{B}$ وارد می‌شود. بنابراین الکترون‌ها به سمت a رانده می‌شوند و در b کمبود بار منفی وجود خواهد داشت. پس یک میدان الکتریکی مانند $\vec{E}$ از b به a به وجود می‌آید،

$$q\vec{E} = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow E = vb$$

اما $V_b - V_a = EL$ ، در نتیجه: $V_b - V_a = vbL$

ت) در وضعیتی که بخشی از حلقه داخل ناحیه میدان مغناطیسی قرار دارد، شار گذرنده از آن با زمان تغییر می‌کند و یک نیروی رو به بالا به حلقه وارد می‌شود که در قسمت آ، $\vec{F} = -k\vec{v}$ به دست آمد.

$$\begin{cases} Mg - T - kv = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g - \frac{kv}{M+m}$$

در وضعیتی که کل حلقه خارج از ناحیه میدان است و یا کل حلقه داخل ناحیه میدان است، شار گذرنده از آن با زمان تغییر نمی‌کند و $\vec{F} = \vec{0}$ ، یا $k = 0$.

$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g$$

ث)

$$v(t)=\alpha+(v_0-\alpha)e^{-\beta t}$$

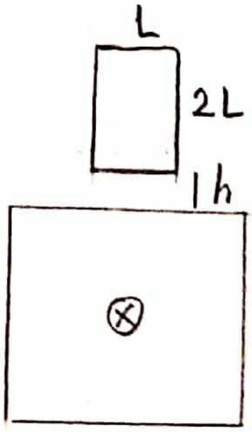
$$a(t)=\frac{dv}{dt}=0-\beta(v_0-\alpha)e^{-\beta t}=-\beta(v-\alpha)$$

با قرار دادن در معادله به دست آمده در قسمت ت:

$$-\beta(v-\alpha)=\left(\frac{M-m}{M+m}\right)g-\frac{kv}{M+m}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta=\frac{k}{M+m} \quad , \quad \alpha=\frac{(M-m)g}{k}$$



ج) در لحظهٔ رسیدن لبهٔ پایینی حلقه به لبهٔ بالایی میدان سرعت سقوط حلقه $v_0=\sqrt{2gh}$ است. می‌خواهیم سرعت حلقه در لحظهٔ $t=0$ چنان باشد که $v(t)$ مستقل از زمان باشد. یعنی $v_0-\alpha=0$

$$\sqrt{2gh}=\frac{(M-m)g}{k}\Rightarrow h=\frac{(M-m)^2g}{2k^2}$$

چ) هنگامی که حلقه با سرعت حد حرکت می‌کند $a=0$ و از قسمت ت داریم

$$v_T=-\frac{1}{k}T+\frac{Mg}{k}\Rightarrow \frac{1}{k}=\frac{0.03}{0.04}\Rightarrow k=\frac{4}{3} \quad , \quad \frac{Mg}{k}=0.1$$

و $g=10\,m/s^2$ ، در نتیجه $M=\frac{4}{3}(0.01)\,kg\simeq 13g$

ح) از بخش T) $R=\frac{B^2L^2}{k}$ ، از طرف دیگر $R=\rho\frac{6L}{A}$ ، A مساحت سطح مقطع سیم است، همچنین چگالی سیم $D=\frac{M}{A(6L)}$ است. در نتیجه

$$D=\frac{M}{6\left(\frac{6\rho k}{B^2}\right)}\Rightarrow D=\frac{MB^2}{36\rho k}=\frac{B^2}{36\rho g}(0.1)\Rightarrow D=\frac{(0.6T)^2(0.1)}{36\times4\times10^{-8}\Omega.m\times10\frac{m}{s^2}}$$

$$D=2500\,kg/m^3$$

P5

آ)
$$n_i(t+\Delta t) = p\,n_{i-1}(t) + q\,n_{i+1}(t) + (1-p-q)\,n_i(t)$$

ب) $n_i(t+\Delta t) = n_i(t)$ در نتیجه

$$n_i(t) = \frac{p}{p+q}\,n_{i-1}(t) + \frac{q}{p+q}\,n_{i+1}(t)$$

اگر بنویسیم $\alpha = \frac{p}{p+q}$ و $\beta = \frac{q}{p+q}$ خواهیم داشت

$$n_i = \alpha n_{i-1} + \beta n_{i+1}$$

اگر جواب به صورت $n_i = x^i$ باشد

$$x^i = \alpha x^{i-1} + \beta x^{i+1} \Rightarrow \beta x^2 - x + \alpha = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\beta}}{2\beta} = \frac{(p+q) \pm (p-q)}{2q} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{p}{q} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$n_i = A_1 \left(\frac{p}{q}\right)^i + A_2$$

پ)
$$\sum_{i=0}^{k} n_i = \sum_{i=0}^{k} \left(A_1 \left(\frac{p}{q}\right)^i + A_2\right)$$

$$= A_1 \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}}{1-\frac{p}{q}} + A_2(k+1)$$

ت)
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(n_i p Q - n_{i+1} q Q\right)$$

$$= \frac{Q}{\Delta t}\left(p\left(A_1\left(\frac{p}{q}\right)^i + A_2\right) - q\left(A_1\left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} + A_2\right)\right)$$

$$I = \frac{Q}{\Delta t} A_2 (p-q)$$

ث) $A_2=0 \Leftarrow I=0$ و

$$n_0 = A_1 \quad , \quad n_k = A_1\left(\frac{P}{q}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{P}{q}\right)^k = \frac{n_k}{n_0}$$

$$\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{P}{q} = \frac{\left(a - bQ\frac{V_0}{k}\right)\Delta t}{\left(a+bQ\frac{V_0}{k}\right)\Delta t} = \frac{1-\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}}{1+\frac{bQ}{a}\frac{V_0}{k}}$$

با استفاده از راهنمایی:

$$\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} \simeq 1 - 2\,\frac{bQ}{a}\,\frac{V_0}{k}$$

$$V_0 \simeq \frac{ak}{2bQ}\left(1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

ج) $$I = \frac{QA_2}{\Delta t}(P-q) = \frac{QA_2}{\Delta t}\left(\left(a-bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t - \left(a+bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t\right)$$

$$I = -2bQ^2\frac{V}{k}A_2 \Rightarrow A_2 = -\frac{Ik}{2bQ^2V}$$

از طرفی داریم

$$n_0 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2V}$$

$$n_k = A_1\left(\frac{P}{q}\right)^k + A_2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{P}{q}\right)^k = \frac{n_k - A_2}{A_1} = \frac{n_k + \frac{Ik}{2bQ^2V}}{n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2V}}$$

اکنون: $P = \left(a - bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t$ و $q = \left(a+bQ\frac{V}{k}\right)\Delta t$ در نتیجه

$$\frac{P}{q} = \frac{a - bQ\frac{V}{k}}{a+bQ\frac{V}{k}}$$

با جایگذاری $\left(\frac{P}{q}\right)$ از قسمت قبل خواهیم داشت

$$\frac{a-bQ\frac{V}{k}}{a+bQ\frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k + \frac{Ik}{2bQ^2V}}{n_0 + \frac{Ik}{2bQ^2V}}\right)^{1/k}$$

$$\frac{1-\frac{b}{a}Q\frac{V}{k}}{1+\frac{b}{a}Q\frac{V}{k}} = \left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1+\frac{Ik}{2bQ^2Vn_k}}{1+\frac{Ik}{2bQ^2Vn_0}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

با استفاده از راهنمایی و نتیجهٔ قسمت ث :

$$1-\frac{2bQ}{a}\frac{V}{k} \approx \left(1-\frac{2bQ}{a}\frac{V_0}{k}\right)\left(1+\frac{I}{2bQ^2Vn_k}-\frac{I}{2bQ^2Vn_0}\right)$$

$$2\frac{bQ}{a}\,\frac{V-V_0}{k} \approx \frac{I}{2bQ^2V}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

اما $V-V_0=RI$ و برای جریان‌های کوچک

$$\frac{1}{V}=\frac{1}{V_0}\left(1-\frac{RI}{V_0}\right)^{-1}\approx\frac{1}{V_0}$$

بنابراین

$$\frac{2bQ}{ak}RI \approx \frac{I}{2bQ^2V_0}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

$$R \approx \frac{ak}{2bQV_0}\,\frac{1}{2bQ^2}\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}\right)$$

از قسمت ب داشتیم $V_0 \approx \frac{ak}{2bQ}\left(1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ ، بنابراین

$$R \approx \frac{1}{2bQ^2}\,\frac{\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_k}}{1-\left(\frac{n_k}{n_0}\right)^{1/k}}$$

آ)

$$\frac{1}{2} m v^2 + C_v T = 0 + C_v T_0$$

(۱) $$v(t) = \sqrt{\frac{2C_v}{m}\left(T_0 - T(t)\right)}$$

ب)

$$\frac{d}{dt}\left(T V^{\gamma-1}\right) = 0 \quad \text{و} \quad V = AL$$

A مساحت پیستون است.

$$\Downarrow$$

(۲) $$\frac{dT}{dt} L^{\gamma-1} + T(\gamma-1) L^{\gamma-2} \frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dL}{dt} = v(t)$$

پ) از روابط (۱) و (۲) و این که $TL^{\gamma-1} = T_0 L_0^{\gamma-1}$ است:

(۳) $$\frac{T_0 L_0^{\gamma-1}}{T} \frac{dT}{dt} + (\gamma-1)\left(\frac{T_0 L_0^{\gamma-1}}{T}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} T \sqrt{\frac{2C_v}{m}(T_0 - T)} = 0$$

ت)

$$T = T_0 y \quad \text{و} \quad t = t_0 x \quad \Leftarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{m L_0^2}{2 C_v T_0}}$$

با قرار دادن در معادله (۳)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + (\gamma-1) y^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1-y} = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} + (\gamma-1) y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sqrt{1-y} = 0$$

ث) به ازای $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3} y^{\frac{5}{2}} \sqrt{1-y} = 0$$

یا

(۴) $$\frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2} \frac{1}{y^{5/2}\sqrt{1-y}}$$

$$x = a\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{-1}{2}} + \frac{3b}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

(۵) $$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^{5/2}\sqrt{1-y}}\left(\frac{3b}{2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{3b}{2}\right)y\right)$$

از مقایسه (۴) و (۵) $b=1$ و $a=3$ و در نتیجه

$$x = 3\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{3}{2}}$$

ج) $$z^3 + 3z - x = 0 \Leftarrow Z = \left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

یعنی $a_1 = 0$ ، $a_2 = 3$ ، $a_3 = -x$ و

$$Q = 1 \quad , \quad R = \frac{1}{2}x \quad , \quad D = 1 + \frac{1}{4}x^2 > 0$$

در نتیجه

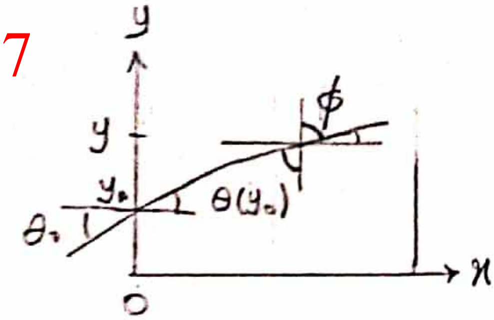
$$\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

به توان ۲ می‌رسانیم

$$\frac{1}{y} - 1 = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$y(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

P7



۳) هنگام ورود نور از هوا به محلول

$$1\sin\theta_0 = n(y_0)\sin\theta(y_0)$$

در حین عبور نور از لایه‌های مختلف محلول

$$n(y)\sin\phi(y) = C \quad \text{ثابت}$$

که ϕ متمم زاویه شیب منحنی مسیر نور با محور x است، یعنی

$$\cot\phi(y) = \frac{dy}{dx} = -A\alpha\sin\alpha(x-B)$$

بنابراین

$$n(y) = C\sqrt{1+\cot^2\phi}$$

$$= C\sqrt{1+A^2\alpha^2\sin^2\alpha(x-B)}$$

$$= C\sqrt{1+A^2\alpha^2-\alpha^2y^2}$$

در $y=0$، $n(y=0)=n_0$ و درنتیجه

$$C = \frac{n_0}{\sqrt{1+A^2\alpha^2}}$$

و

$$n(y) = n_0\sqrt{1-\frac{\alpha^2y^2}{1+A^2\alpha^2}}$$

ب)

$$\frac{1}{1+A^2\alpha^2} = (1+A^2\alpha^2)^{-1} \simeq 1-A^2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha^2y^2}{1+A^2\alpha^2} \simeq \alpha^2y^2-(\alpha^2A^2)(\alpha^2y^2)+\cdots \approx \alpha^2y^2$$

$$n(y) \approx n_0\sqrt{1-\alpha^2y^2} = n_0(1-\alpha^2y^2)^{\frac{1}{2}} \approx n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2y^2\right)$$

$$n(y) \approx n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2y^2\right)$$

پ) $y(x=0)=y_0 \Rightarrow y_0 = A\cos\alpha B$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \cot\phi(y_0) = \tan\theta(y_0) \Rightarrow \tan\theta(y_0) = A\alpha\sin\alpha B$$

در قسمت ت داشتیم $\sin\theta_0 = n(y_0)\sin\theta(y_0)$. برای زوایای کوچک

$\sin\theta(y_0) \approx \tan\theta(y_0)$ و $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ در نتیجه

$$\theta_0 \approx n(y_0)\, A\alpha\sin\alpha B$$

بنابراین:

$$\begin{cases} y_0 = A\cos\alpha B \\ \dfrac{\theta_0}{n(y_0)} = A\alpha\sin\alpha B \end{cases}$$

اما $\sin^2\alpha B + \cos^2\alpha B = 1$ در نتیجه:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\theta_0^2}{\alpha^2}\frac{1}{n^2(y_0)}}$$

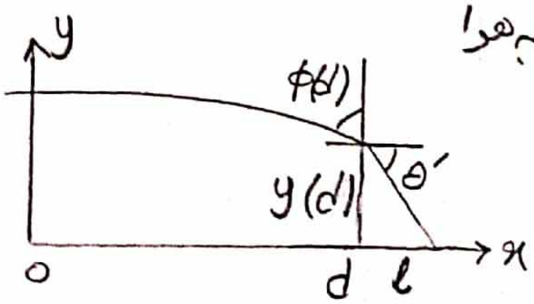
و از $\tan\alpha B = \dfrac{\theta_0}{\alpha}\dfrac{1}{y_0 n(y_0)}$ خواهیم داشت:

$$B = \frac{1}{\alpha}\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{\theta_0}{\alpha}\frac{1}{y_0 n(y_0)}\right)$$

ت) $\theta_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = y_0 \Rightarrow y = y_0\cos\alpha x$

$n(y)$ موقع خروج ولی داخل محلول برابراست با:

$$n(y=d) \approx n_0\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2\cos^2\alpha d\right)$$



قانون اسنل در موقع خروج پرتو از محلول به هوا

$$1 \sin\theta' = \cos\phi(d)\, n(y=d)$$

اما

$$-\cot\phi(d) = -y_0 \alpha \sin\alpha d$$

و

$$\cos\phi(d) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi(d)}} = \frac{|\cot\phi(d)|}{\sqrt{1+\cot^2\phi(d)}} = \frac{\alpha y_0 \sin\alpha d}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d}} = (1+\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2 \sin^2\alpha d$$

و

$$\cos\phi(d) \approx \alpha y_0 \sin\alpha d$$

در نتیجه با جاگذاری $n(y=d)$

$$\sin\theta' \approx (\alpha y_0 \sin\alpha d) n_0 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2 \cos^2\alpha d\right)$$

مطابق شکل $\tan\theta' = \frac{y_0}{f} = \frac{y(d)}{\ell}$ و با توجه به کوچک بودن θ'، $\tan\theta' \approx \sin\theta'$:

$$f = \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin\alpha d} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y_0^2 \cos^2\alpha d} \approx \frac{y_0}{\alpha y_0 n_0 \sin\alpha d} \Rightarrow f \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin\alpha d}$$

ث)

$$\ell = f\,\frac{y(d)}{y_0} \Rightarrow \ell \approx \frac{1}{\alpha n_0 \sin\alpha d} \cos\alpha d = \frac{1}{\alpha n_0} \cot\alpha d$$

ج) از قسمت قبل:

$$\ell_1 - \ell_2 = \frac{\cot\alpha d}{\alpha}\left(\frac{1}{n_0(\lambda_1)} - \frac{1}{n_0(\lambda_2)}\right)$$

$$= \frac{\cot\alpha d}{\alpha} \frac{n_0(\lambda_2) - n_0(\lambda_1)}{n_0(\lambda_1) n_0(\lambda_2)}$$

پس از جاگذاری از $n_0(\lambda) = C + \frac{D}{\lambda^2}$ خواهیم داشت

$$\ell_1 - \ell_2 = \frac{\cot\alpha d}{\alpha} \frac{D(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(C\lambda_1 + D)(C\lambda_2 + D)}$$